# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1961

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 20. Oktober 1961

*Postverlagsort Berlin* *Preis DM 15,—*

Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus,** Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler,** Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

**Nachdruck:** Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

**Photokopien:** Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Postfach 3027
Fernsprecher 2 79 01 / Fernschreib-Nr. 04 — 61 723

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01 / Fernschreib-Nr. 01 — 83 319

---

## Inhalt:

Seite

*Kestens, J.*, Note sur les vitesses critiques d'un arbre muni de disques. Mit 6 Abbildungen ..... 369

*Tokuoka, T.*, General Stress-Strain Relations in Non-linear Theory of Viscoelasticity for Large Deformations ..... 385

*Kraus, L.*, Grundsätzliche Lösung des Problems der freien Kippung rechteckiger Rahmen mit doppelt-symmetrischen Querschnitten. Mit 12 Abbildungen ..... 394

*Ziegler, H.*, Zwei Extremalprinzipien der irreversiblen Thermodynamik. Mit 2 Abbildungen ..... 410

*Bufler, H.*, Der Spannungszustand in einem geschichteten Körper bei axialsymmetrischer Belastung. Mit 9 Abbildungen ..... 417

*Gersten, K.*, Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis. Mit 13 Abbildungen ..... 431

INGENIEUR-ARCHIV

XXX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1961

# Note sur les vitesses critiques d'un arbre muni de disques

Par J. Kestens

**1. Introduction.** Nous nous proposons d'examiner les vitesses critiques d'un arbre muni de disques. Nous supposerons que l'arbre est de révolution autour d'un axe rectiligne (dans sa position non déformée). Des disques ou volants sont calés sur cet arbre. Considérons un de ces disques, le $i$-me p. ex.: $G_i$ est son centre de gravité et $J_{1i}$, $J_{2i} = J_{3i}$ sont les trois moments d'inertie principaux. Ce disque est calé sur l'arbre de telle façon que l'axe principal portant $J_{1i}$ est parallèle à l'axe $x$ de l'arbre non déformé, ce qui revient à supposer que l'angle de calage du disque sur l'arbre est nul. L'intersection de l'axe $x$ de l'arbre avec le plan principal perpendiculaire à l'axe portant $J_{1i}$ définit un point $A_i$ qui est en général différent de $G_i$: les disques sont imparfaitement centrés. Soient $e_i = A_i G_i$ l'excentricité et $\Theta_i$ l'azimut de $A_i G_i$ mesuré à partir d'un repère commun à tous les disques.

Le rotor est donc formé d'une série de $n$ disques calés sur un arbre élastique de masse linéaire variable et de moment d'inertie géométrique des sections variable. Le problème dynamique général d'un tel rotor en rotation est complexe. Nous simplifions le problème en négligeant les vibrations de torsion d'une section de l'arbre par rapport à une autre section et en supposant donc que ce rotor est animé d'un mouvement de rotation en bloc. L'azimut du disque $i$ en rotation est donné par

$$\varphi_i = \varphi + \Theta_i\,, \quad \text{avec} \quad \dot{\varphi} = \omega\,,$$

ou $\omega$ est la vitesse instantanée de rotation.

Considérons un instant, avec *Grammel* [1]* un arbre sans masse et supposons $\varepsilon_i = e_i^2/k_i^2 \ll 1$ avec $m_i\, k_i^2 = J_{1i}$ ($m_i$: masse du disque $i$, $k_i$: rayon de gyration). Lorsque ce rotor tourne à une vitesse $\omega = \text{const.}$, l'application des théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique montrent qu'en première approximation (parce que $\varepsilon_i \ll 1$) le mouvement de $G_i$ est solution d'un système de deux équations différentielles avec seconds membres, soit donc la solution générale (somme de mouvements périodiques de pulsations $\omega_i$) et une solution particulière de pulsation $\omega$ (avec $\omega \neq \omega_i$). Pour que $\dot{\omega} = 0$ rigoureusement il faut appliquer à l'arbre un couple $M$ qui est petit et en première approximation $M = 0$. Lorsque $\omega = \omega_i$ est une des pulsations solution des équations différentielles sans second membre, la solution particulière croît linéairement avec le temps. Cette croissance est très rapide aussi ces vitesses de rotations sont-elles très dangereuses, c'est la raison pour laquelle on les appelle les vitesses critiques ([1]. t. 2., p. 155—159).

*Grammel* [1], [2] a établi ce qu'il appelle le Principe d'Equivalence: Les vitesses critiques $\omega_i$ coïncident avec les vitesses de rotation d'un système équivalent où les excentricités $e_i$ sont nulles (système parfait) et qui est tel que cet arbre ait une flèche stationnaire dans son équilibre relatif, sous l'effet des réactions d'inertie d'entraînement (forces centrifuges et couples gyrostatiques) et des forces de rappel élastique.

*Grammel* a démontré cette proposition lorsqu'on ne tient pas compte de l'effet raidissant du couple gyrostatique du disque ([1], t. 2, p. 191). *Ziegler* a étudié le même problème en tenant compte du couple gyrostatique et est arrivé aux mêmes conclusions ([8], n° 2, 3 et 4). Dans un ordre d'idées plus générales, *Ziegler* [7] a étudié de façon critique les divers critères de stabilité (méthode statique, du défaut initial, énergétique, dynamique) et il a montré que le principe d'équivalence doit être utilisé avec prudence, car il n'est pas valable d'une façon absolue. En ce qui concerne le problème que nous traitons ici, le système parfait est stable quelle que soit la vitesse de rotation $\omega$ mais il ne possède de configuration non triviale que pour certaines vitesses de rotation $\omega_i$. Ce sont ces configurations non triviales (flèches stationnaires) qui, par l'existence d'imperfections (balourds, $e_i \neq 0$) créent des forces d'inertie entraînant une instabilité ([7], p. 396). Par contre, le système réel ($e_i \neq 0$) est stable pour $\omega \neq \omega_i$ et le principe d'équivalence est bien d'application dans notre cas ([7], n° 31 et 32, p. 394—397).

* Voir les références page 384.

Ces vitesses critiques sont également appelées vitesses critiques synchrones directes („Gleichlauf"). Ce sont les seules vitesses critiques qui sont excitées par les forces d'inertie des balourds. D'autres forces excitatrices, telles que des vibrations transversales des appuis, peuvent exciter d'autres vitesses critiques, dites vitesses critiques rétrogrades („Gegenlauf", [8], p. 383). Ces vitesses critiques sont beaucoup moins dangereuses car elles impliquent une importante dissipation d'énergie interne de l'arbre qui ne tourne plus d'un bloc ([1], t. 2, p. 164).

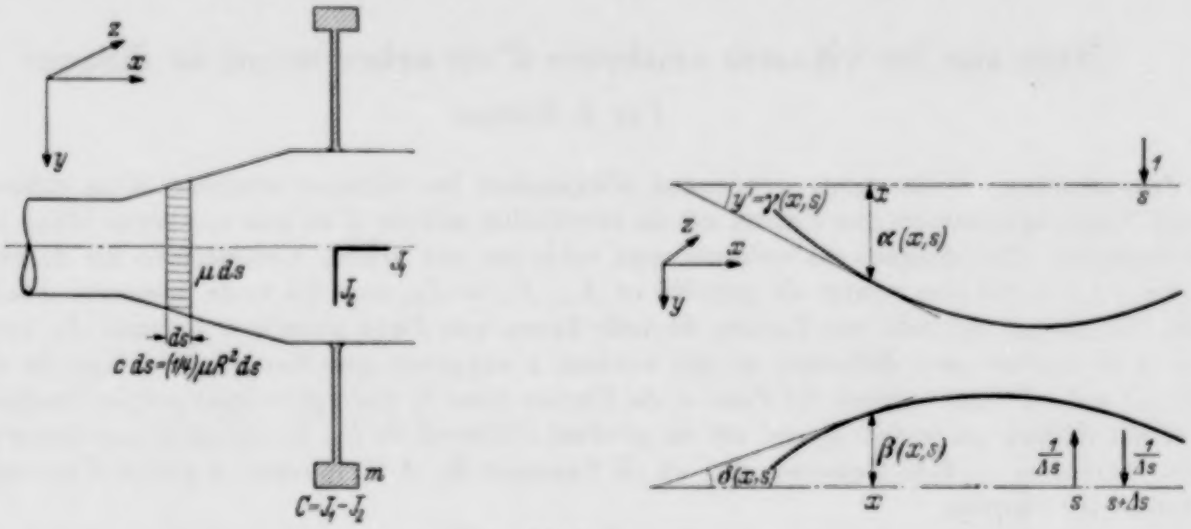



Fig. 1.

Rappelons enfin que nous supposons que l'arbre est de révolution; en fait, ce que nous exigeons est que l'inertie et le coefficient $\alpha(x, s)$ (voir ci-dessous, n° **2**) ne dépendent pas de l'azimut. Si par exemple, $\alpha(x, s)$ ne présente pas cette symétrie (influence de clavettes de fixation des disques par exemple), *Grammel* a établi qu'il y a dédoublement des vitesses critiques $\omega_i$ et que le système est instable dans les intervalles des vitesses qui en résultent ([1], t. 2, p. 166—168).

Le principe d'équivalence permet de simplifier la formulation mathématique du problème qui nous occupe: établir l'existence des vitesses critiques synchrones directes („Gleichlauf").

**2. Coefficients d'influence.** Soit $F\,\alpha(x, s)$ la flèche de l'arbre en $x$ due à une force $F$ appliquée en $s$. L'application du théorème de Betti montre immédiatement que $\alpha(x, s) = \alpha(s, x)$. Outre le coefficient d'influence $\alpha$, introduisons les coefficients $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ définis de la façon suivante (figure 1):

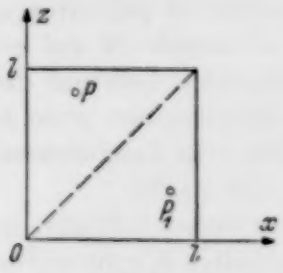



Fig. 2.

$$\beta(x, s) = \frac{\partial \alpha(x, s)}{\partial s} = \lim \left[\frac{\alpha(x, s + \Delta s)}{\Delta s} - \frac{\alpha(x, s)}{\Delta s}\right] = \text{flèche en } x \text{ due à un couple } +1 \text{ en } s\,,$$

$$\gamma(x, s) = \frac{\partial \alpha(x, s)}{\partial x} = \lim \frac{1}{\Delta x}\,[\alpha(x + \Delta x, s) - \alpha(x, s)] = \text{pente en } x \text{ due à une force } +1 \text{ en } s\,,$$

$$\delta(x, s) = \frac{\partial^2 \alpha(x, s)}{\partial x\, \partial s} = \text{pente en } x \text{ due à un couple } +1 \text{ en } s\,.$$

Ces coefficients d'influence ont été introduits par *van den Dungen* [3] (voir également [1] t. I p. 95). Ils jouissent de propriétés de symétrie que nous allons établir brièvement. L'arbre, ou le rotor, est de longueur $l$ et la fonction $\alpha(x, s)$ est définie dans un carré de cotés $l$. Si $P$ et $P_1$ sont deux points du carré symétriquement placés par rapport à la diagonale $x = s$ (figure 2), on a, comme il a été rappelé ci-dessus,

$$\alpha(x, s) = \alpha(s, x) \quad \text{ou} \quad \alpha(P) = \alpha(P_1)\,. \tag{2}$$

Si on porte la valeur de la fonction $\alpha(P)$ perpendiculairement au plan $x, s$ on obtient une surface représentative de la fonction $\alpha$, qui est symétrique par rapport au plan $x = s$ et on en déduit

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\alpha(P) = \frac{\partial}{\partial s}\,\alpha(P_1)$$

soit

$$\gamma(P) = \beta(P_1) \quad \text{ou} \quad \gamma(x, s) = \beta(s, x)\,, \tag{3}$$

et on a évidemment

$$\delta(x, s) = \delta(s, x)\,. \tag{4}$$

**3. Equation de l'équilibre relatif du rotor.** En vertu du principe d'équivalence, exprimons que le rotor en rotation est en équilibre relatif. A cet effet, considérons un disque. Soient (figure 3) $Ox$ la ligne d'arbre (axe du rotor non déformé), $Oy$ perpendiculaire à $Ox$ et tel que l'arbre fléchi soit dans le plan $(x, y)$, $Oz$ complète ce trièdre tournant autour de $Ox$ à la vitesse angulaire $\omega$. Attachons en outre au disque considéré le système d'axes $(G; \xi, \eta, z)$, le vecteur unitaire $\bar{1}_\xi$ est tangent à la ligne élastique, $\bar{1}_\eta$ est dans le plan $(x, y)$ et $\bar{1}_z$ est parallèle à l'axe $Oz$.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à ce disque donne

$$0 = m\,\bar{j}_r = \sum \bar{F} - m\,\bar{j}_e - m\,\bar{j}_c \tag{5}$$

où $\bar{j}_r$, $\bar{j}_e$ et $\bar{j}_c$ sont les accélérations relatives, d'entraînement et de Coriolis et $\sum \bar{F}$ est la résultante des forces extérieures appliquées au disque.

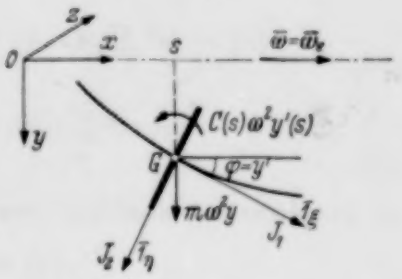


Fig. 3.

On a $j_e = -\omega^2 y$, $j_c = j_r = 0$ et (5) donne

$$-\sum F = m\,\omega^2\,y \tag{6}$$

où $-\sum F$ est, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, l'action du disque sur l'arbre.

Pour appliquer le théorème du moment cinétique, commençons par calculer ce dernier. Le disque est soumis à une rotation instantanée absolue

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r = \bar{\omega}_e$$

puisque $\bar{\omega}_r = 0$ (équilibre relatif).

Le moment cinétique $\bar{\mathfrak{M}}_G$ $(= A\,p\,\bar{1}_\xi + B\,q\,\bar{1}_\eta + C\,r\,\bar{1}_z$ suivant les notations classiques) vaut

$$\bar{\mathfrak{M}}_G = J_1\,\omega_e \cos\varphi\;\bar{1}_\xi - J_2\,\omega_e \sin\varphi\;\bar{1}_\eta\,.$$

Par dérivation on a

$$\frac{d\bar{\mathfrak{M}}_G}{dt} = J_1\,\omega_e \cos\varphi\,\frac{d\bar{1}_\xi}{dt} - J_2\,\omega_e \sin\varphi\,\frac{d\bar{1}_\eta}{dt}$$

et

$$\frac{d\bar{1}_\xi}{dt} = \sin\varphi\;\omega_e\,\bar{1}_z, \qquad \frac{d\bar{1}_\eta}{dt} = \cos\varphi\;\omega_e\,\bar{1}_z,$$

donc

$$\frac{d\bar{\mathfrak{M}}_G}{dt} = (J_1 - J_2)\,\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\;\bar{1}_z.$$

La pente $\varphi$ étant faible, $\sin\varphi \approx \varphi \approx y'$ et $\cos\varphi \approx 1$. Posons $C = J_1 - J_2$[1]. On a

$$\frac{d\bar{\mathfrak{M}}_G}{dt} = C\,\omega^2\,y'\,\bar{1}_z$$

= couple appliqué au disque $(= 0)$ + couple de réaction de l'arbre sur le disque (qui vaut — couple de réaction du disque sur l'arbre).

L'action du disque sur l'arbre est donc un couple

$$-C\,\omega^2\,y'\,\bar{1}_z. \tag{7}$$

Les équations de l'équilibre relatif de l'arbre s'obtiennent immédiatement avec (1), (6) et (7): l'arbre est soumis aux forces (6) et aux couples (7), on a donc

$$y(x) = \omega^2 \sum_i \alpha(x, s_i)\,m(s_i)\,y(s_i) - \omega^2 \sum_i \beta(x, s_i)\,C(s_i)\,y'(s_i)\,,$$

$$y'(x) = \omega^2 \sum_i \gamma(x, s_i)\,m(s_i)\,y(s_i) - \omega^2 \sum_i \delta(x, s_i)\,C(s_i)\,y'(s_i)\,.$$[2]

[1] C est généralement positif dans le cas des disques (pour les disques minces sans jante on a $C \approx J_1/2 \approx J_2$). La théorie que nous développons est également valable pour des disques tels que $C < 0$ (Ceci pourrait se produire si le disque est muni d'une jante importante).

[2] Dans le cas des vitesses critiques synchrones rétrogrades („Gegenlauf"), on a $\omega_e = -\omega_a$, soit $\omega_r = 2\,\omega_a$. Il est aisé de voir que dans ce cas on obtient les équations aux vitesses critiques en remplaçant $C(s_i)$ par $-C'(s_i) = -[J_1(s_i) + J_2(s_i)]$ ([1], p. 186). Enfin, le cas des oscillations de flexion du système qui vibre dans un plan, sans tourner, s'obtient en remplaçant $C(s_i)$ par $-J_2(s_i)$. $\omega$ est, dans ce cas, la pulsation de ces oscillations ([6]).

Si nous nous limitons à l'approximation de la résistance des matériaux, on sait que les sections de l'arbre initialement planes restent planes après déformation (le gauchissement de ces sections est dû aux contraintes tangentielles, nous négligeons cet effet). Dans ces conditions l'arbre lui-même peut être considéré comme la juxtaposition de disques d'épaisseur $ds$ dont la masse vaut $\mu\, ds$ et dont la différence des moments d'inertie principaux vaut $c\, ds = j_1\, ds - j_2\, ds = \frac{1}{4}\, \mu\, R^2\, ds > 0$ avec $R$, le rayon de l'arbre. L'équation générale de l'équilibre relatif s'écrit donc

$$y(x) = \omega^2 \sum_i \alpha(x, s_i)\, m(s_i)\, y(s_i) + \omega^2 \int_0^l \alpha(x, s)\, \mu(s)\, y(s)\, ds$$
$$- \omega^2 \sum_i \beta(x, s_i)\, C(s_i)\, y'(s_i) - \omega^2 \int_0^l \beta(x, s)\, c(s)\, y'(s)\, ds$$

et une équation analogue pour $y'(x)$. On peut écrire ces équations sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= \omega^2 \mathsf{S}_s\, \alpha(x, s)\, m(s)\, y(s) - \omega^2 \mathsf{S}_s\, \beta(x, s)\, c(s)\, y'(s)\,, \\ y'(x) &= \omega^2 \mathsf{S}_s\, \gamma(x, s)\, m(s)\, y(s) - \omega^2 \mathsf{S}_s\, \delta(x, s)\, c(s)\, y'(s)\,, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

où les sommes $\mathsf{S}$ sont étendues sur les masses concentrées et continues, ce sont des intégrales de Stieltjes, déjà considérées par *B. de Saint-Venant.*

Nous obtenons ainsi un système homogène de deux équations intégrales pour les fonctions $y$, $y'$, ou encore, une équation intégro-différentielle [l'une ou l'autre des équations (8); la seconde est en effet la dérivée par rapport à $x$ de la première si on se souvient de la définition de $\gamma(x, s)$ et $\delta(x, s)$, ($n^0$ 2)].

**4. Réduction du système (8) à une équation intégrale à noyau symétrique.** Multiplions la première équation (8) par $\sqrt{m(x)}$ et la seconde par $i\sqrt{c(x)}$, $i = \sqrt{-1}$. Le système (8) s'écrit, en posant $\lambda = \omega^2$,

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{m(x)}\, y(x) &= \lambda\, \mathsf{S}\, \alpha(x, s)\, \sqrt{m(x)\, m(s)}\, \sqrt{m(s)}\, y(s) + \lambda\, \mathsf{S}\, i\, \beta(x, s)\, \sqrt{c(s)\, m(x)}\, i\sqrt{c(s)}\, y'(s)\,, \\ i\sqrt{c(x)}\, y'(x) &= \lambda\, \mathsf{S}\, i\, \gamma(x, s)\, \sqrt{m(s)\, c(x)}\, \sqrt{m(s)}\, y(s) - \lambda\, \mathsf{S}\, \delta(x, s)\, \sqrt{c(x)\, c(s)}\, i\sqrt{c(s)}\, y'(s)\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Effectuons le changement de variables

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + p\, l \leqq 2\, l, \qquad p = 0, 1\,, \\ \eta &= s + p\, l \leqq 2\, l, \qquad p = 0, 1\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

et posons

$$Y(\xi) = \begin{cases} \sqrt{m(x)}\, y(x) & \text{pour } p = 0, \text{ soit pour } 0 \leqq \xi < l\,, \\ i\sqrt{c(x)}\, y'(x) & \text{pour } p = l, \text{ soit pour } l < \xi \leqq 2\, l. \end{cases} \tag{11}$$

Le système (9) s'écrit

$$Y(\xi) = \lambda \mathsf{S}_{\sigma=0}^{2l} K(\xi, \sigma)\, Y(\sigma)\,, \tag{12}$$

où le noyau $K$ est défini de la façon suivante

| $K(\xi, \sigma)$ | $0 \leqq \xi < l$ | $l < \xi \leqq 2\, l$ |
|---|---|---|
| $0 \leqq \sigma < l$ | $\alpha(x, s)\, \sqrt{m(x)\, m(s)}$ | $i\, \gamma(x, s)\, \sqrt{m(s)\, c(x)}$ |
| $l < \sigma \leqq 2\, l$ | $i\, \beta(x, s)\, \sqrt{m(x)\, c(s)}$ | $-\delta(x, s)\, \sqrt{c(x)\, c(s)}$ |

(13)

En vertu de (3) on constate que le noyau $K$ est symétrique: $K(\xi, \sigma) = K(\sigma, \xi)$, il est complexe (mais pas hermitique).

L'équation (12) est donc une équation intégrale homogène mixte à noyau symétrique complexe Nous montrerons que cette équation admet des solutions $Y$ non triviales (dites fonctions propres) pour des valeurs discrètes de $\lambda$ (dites valeurs propres). $Y(\xi)$ défini par (11) est réel pour $0 \leqq \xi < l$ et (lorsque $c(x) > 0$) imaginaire pur pour $l < \xi \leqq 2\, l$ si le système (8) ou (9) admet une solution réelle $(y, y')$ (ce que nous montrerons être le cas).

**5. Orthoganalité des fonctions propres.** Supposons que l'équation (12) admette les valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$ auxquelles correspondent les fonctions propres $Y_1$ et $Y_2$:

$$Y_1(\xi) = \lambda_1 \sum_\sigma K(\xi, \sigma)\, Y_1(\sigma) \quad \text{et} \quad Y_2(\xi) = \lambda_2 \sum_\sigma K(\xi, \sigma)\, Y_2(\sigma)\,.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_\xi Y_1(\xi)\, Y_2(\xi) &= \lambda_1 \sum_\xi \sum_\sigma K(\xi, \sigma)\, Y_1(\sigma)\, Y_2(\xi) \\ &= \lambda_2 \sum \sum K(\xi, \sigma)\, Y_2(\sigma)\, Y_1(\xi) \\ &= \lambda_2 \sum \sum K(\xi, \sigma)\, Y_1(\sigma)\, Y_2(\xi) \end{aligned} \tag{14}$$

puisque $K(\xi, \sigma) = K(\sigma, \xi)$, donc

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \sum \sum K(\xi, \sigma)\, Y_1(\sigma)\, Y_2(\xi)\,, \tag{15}$$

et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\xi \sum_\sigma K(\xi, \sigma)\, Y_1(\sigma)\, Y_2(\xi) = \sum_\xi Y_1(\xi)\, Y_2(\xi) = 0\,, \\ &\sum_x m(x)\, y_1(x)\, y_2(x) - \sum_x c(x)\, y_1'(x)\, y_2'(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

soit explicitement

qui exprime que les fonctions $Y_1$, $Y_2$, soit $(y_1, y_1')$, $(y_2, y_2')$, sont orthogonales.

**6. Réalité des valeurs propres.** Supposons que le système (9) admette une valeur propre complexe $\lambda$ à laquelle correspond une fonction propre complexe $y = u + i\,v$, $y' = u' + i\,v'$. Les coefficients du système (9) étant réels, ce système admet également la valeur propre conjuguée $\bar{\lambda}$ et la fonction propre conjuguée $\bar{y} = u - i\,v$. Posons

$$\left.\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \begin{cases} \sqrt{m(x)}\, y(x) & \text{fonction propre à laquelle correspond} \\ i\sqrt{c(x)}\, y'(x) & \text{la valeur propre } \lambda, \end{cases} \\ Y_2(\xi) &= \begin{cases} \sqrt{m(x)}\, \bar{y}(x) & \text{fonction propre à laquelle correspond} \\ i\sqrt{c(x)}\, \bar{y}'(x) & \text{la valeur propre } \bar{\lambda},\ ^1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

et appliquons (15)

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \sum \sum K(\xi, \sigma)\, Y_1(\sigma)\, Y_2(\xi)\,. \tag{18}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_\xi \sum_\sigma K(\xi, \sigma)\, Y_1(\sigma)\, Y_2(\xi) &= \sum_x \sum_s [\alpha(x, s)\, m(x)\, m(s)\, y(s)\, \bar{y}(x) + i\,\gamma(x, s)\, m(s)\, c(x)\, y(s)\, i\,\bar{y}'(x) \\ &\quad + i\,\beta(x, s)\, m(x)\, c(s)\, i\,y'(s)\, \bar{y}(x) - \delta(x, s)\, c(x)\, c(s)\, i\,y'(s)\, i\,\bar{y}'(x)] \\ &= \sum \sum \{\alpha(x, s)\, m(x)\, m(s)\, y(s)\, \bar{y}(x) + \delta(x, s)\, c(x)\, c(s)\, y'(s)\, \bar{y}'(x) \\ &\quad - \beta(x, s)\, m(x)\, c(s)\, [y'(s)\, \bar{y}(x) + \bar{y}'(s)\, y(x)]\} \\ &= \sum \sum \{\alpha(x, s)\, m\,(x)\, m(s)\, [u(x)\, u(s) + v(x)\, v(s)] \\ &\quad + \delta(x, s)\, c(x)\, c(s)\, [u'(x)\, u'(s) + v'(x)\, v'(s)] \\ &\quad - 2\,\beta(x, s)\, m(x)\, c(s)\, [u(x)\, u'(s) + v(x)\, v'(s)]\} \end{aligned}$$

en vertu des relations de symétrie (2) (3) (4).

Ce second membre est formé de sommes réelles. Il s'ensuit que $(\lambda - \bar{\lambda}) = 0$ et $\lambda$ est réel, et considérant le système (8) ou (9), les fonctions $y(x)$, $y'(x)$ sont également réelles.

**7. a) Définition.** Considérons une fonction arbitraire

$$U(\xi) = \begin{cases} \sqrt{m(x)}\, u(x)\,, & 0 \leqq \xi < l\,, \\ i\sqrt{c(x)}\, u'(x)\,, & l < \xi \leqq 2\,l\,, \end{cases}$$

et $u$, $u'$ réels, suffisamment régulière pour que

$$\sum \sum K(\xi, \sigma)\, U(\xi)\, U(\sigma)$$

existe. Nous dirons que cette fonction $U$ est admissible.

---

[1] On remarquera que $Y_2(\xi) = -\bar{Y}_1(\xi)$, $Y_2(\xi)$ n'est donc pas la fonction conjuguée de $Y_1(\xi)$.

b) Lemme 1. Le nombre $\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,K(\xi,\sigma)\,U(\xi)\,U(\sigma)$ est positif.
En effet

$$\sum_{\xi}\sum_{\sigma} K(\xi,\sigma)\,U(\xi)\,U(\sigma) = \sum_{x}\sum_{s}[\alpha(x,s)\,m(x)\,m(s)\,u(x)\,u(s) - \beta(x,s)\,m(x)\,c(s)\,u(x)\,u'(s) - \gamma(x,s)\,c(x)\,m(s)\,u'(x)\,u(s) + \delta(x,s)\,c(x)\,c(s)\,u'(x)\,u'(s)]\,.$$

Des forces $F(s)$ et des couples $+M(s)$ donnent les flèches $u(x)$ et les pentes $u'(x)$:

$$u(x) = \sum_{s}\alpha(x,s)\,F(s) + \sum_{s}\beta(x,s)\,M(s)\,,$$

$$u'(x) = \mathsf{S}\,\gamma(x,s)\,F(s) + \mathsf{S}\,\delta(x,s)\,M(s)\,.$$

Le travail (virtuel) de ces forces et de ces couples est positif. Il vaut

$$\sum_{x} F(x)\,u(x) + \sum_{x} M(x)\,u'(x) = \sum_{x}\sum_{s}[\alpha(x,s)\,F(s)\,F(x) + \beta(x,s)\,M(s)\,F(x) + \gamma(x,s)\,F(s)\,M(x) + \delta(x,s)\,M(s)\,M(x)] > 0\,.$$

Il suffit de prendre les „forces" $m(s)\,u(s)$ et les „couples" $+M(s) = -c(s)\,u'(s)$ pour que le lemme soit démontré.

Ceci est une démonstration physique. Nous montrerons ultérieurement (n° 12) que

$$\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,K(\xi,\sigma)\,U(\xi)\,U(\sigma) = \int_0^l E\,I\,v''^2\,dx$$

où $v(x)$ est la fonction itérée de la fonction $u(x)$. Il est manifeste que cette dernière intégrale est définie positive.

**8.a) Définition.** Soit $U_0(\xi)$ une fonction admissible, la fonction itérée $V_0(\xi)$ est définie par

$$V_0(\xi) = \sum_{\sigma} K(\xi,\sigma)\,U_0(\sigma)\,. \tag{19}$$

b) Existence des Valeurs Propres. Théorème I. Calculons le nombre réel $R = R(U_0, V_0)$ (rapport de Rayleigh) défini par

$$R(U_0, V_0) = \frac{\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,K(\xi,\sigma)\,U_0(\sigma)\,U_0(\xi)}{\mathsf{S}\,V_0^2(\xi)} = \frac{\mathsf{S}\,U_0(\xi)\,V_0(\xi)}{\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,K(\xi,\sigma)\,U_0(\sigma)\,V_0(\xi)}\,. \tag{20}$$

Suivant que $R(U_0)$ est $> 0$ ou $< 0$, on a

$$0 < \lambda_1 \leqq R(U_0) \quad \text{ou} \quad 0 > \lambda_{-1} \geqq R(U_0)\,. \tag{21}$$

En vertu du Lemme 1 (n° 7. b), $R(U_0)$ a le signe de

$$\sum_{\xi} V_0^2(\xi) = \sum_{x} m(x)\,v_0^2(x) - \sum_{x} c(x)\,v_0'^2(x)\,.$$

Nous commençons par démontrer le

c) Lemme II. Il existe des fonctions itérées $V(\xi)$ telles que $\mathsf{S}V^2(\xi) \neq 0$ [1]. (22)

1. Cas où $\mu(x) \not\equiv 0$ ou $c(x) \not\equiv 0$. C'est en particulier le cas où il y a une masse répartie. Toute fonction itérée $v$ est une fonction de classe $C'[a,b]$ (c.à.d. continue ainsi que sa première dérivée, et dont la dérivée seconde est continue sur des segments, dans l'intervalle fermé $[a,b]$ limitant l'arbre) et qui satisfait les conditions aux limites aux appuis (soit, par exemple si l'arbre est simplement appuyé, $v(a) = v''(a) = 0$ et $v(b) = v''(b) = 0$) comme cela ressort de la définition (19) des fonctions itérées qui sont les flèches que prend l'arbre sous l'effet des charges ou des couples arbitraires, ces flèches sont de classe $C'$ puisqu'elles peuvent présenter des discontinuités de moment fléchissant ($v''$) et d'effort tranchant ($v'''$).

Supposons (démonstration par l'absurde) que $\mathsf{S}\,V_1^2(\xi) = 0$ quel que soit $V_1$. Si $V_2$ est une fonction itérée, $V_1 + V_2$ l'est également et

$$\mathsf{S}\,[V_1(\xi) + V_2(\xi)]^2 = \mathsf{S}\,V_1^2(\xi) + \mathsf{S}\,V_2^2(\xi) + 2\,\mathsf{S}\,V_1(\xi)\,V_2(\xi) = 0\,,$$

soit

$$\sum_{\xi=0}^{2l} V_1(\xi)V_2(\xi) = \sum_{x=0}^{l} m(x)\,v_1(x)\,v_2(x) - \sum_{x} c(x)\,v_1'(x)\,v_2'(x) = 0 \tag{23}$$

[1] Le mode de raisonnement de cette démonstration est dû à *Kamke* [4].

quels que soient $V_1$ et $V_2$. Or une intégration par parties donne

$$\int_0^l v_2(c\,v_1')'\,dx = [v_2(c\,v_1']_0^l - \int_0^l c\,v_2'\,v_1'\,dx = -\int_0^l c\,v_2'\,v_1'\,dx$$

où les termes intégrés disparaissent puisque $v$ est continu, et que nous supposons la poutre appuyée à ses extrémités. Donc

$$\mathsf{S}\,m\,v_1\,v_2 - \mathsf{S}\,c\,v_1'\,v_2' = \int_0^l v_2\,[\mu\,v_1 + (c\,v_1')']\,dx + \sum m\,v_1\,v_2 - \sum C\,v_1'\,v_2' \tag{24}$$

quelle que soit la fonction $v_2$, les sommes étant étendues sur les disques.

En particulier, pour $v_2$ telle que $\sum m\,v_1\,v_2 - \sum C\,v_1'\,v_2' = 0$ (de telles $v_2$ sont manifestement des fonctions itérées, il est en effet possible de solliciter l'arbre par des forces et des couples tels que les flèches et les pentes aux droits des disques soient nulles) on a

$$\int_0^l v_2\,[\mu\,v_1 + (c\,v_1')']\,dx = 0 \tag{25}$$

quelle que soit la fonction itérée $v_2$, ce qui implique $\mu\,v_1 + (c\,v_1')' = N(v_1) = 0$.

En effet, supposons $N(v_1) \not\equiv 0$, il existe alors un intervalle $[\alpha, \beta]$ (ne contenant pas de disque) tel que $N(v_1) > 0$ et on peut choisir $v_2 > 0$ dans cet intervalle, et $v_2 = 0$ en dehors de cet intervalle, et dans ce cas $\int_0^l v_2\,N(v_1)\,dx > 0$, en contradiction avec (25).

Ainsi il faut $N(v_1) \equiv 0$ pour toute fonction itérée $v_1$, or il est manifeste qu'il existe des fonctions itérées $v_1$ telles que $N(v_1) \not\equiv 0$. En effet, si $c \not\equiv 0$, ou si $\mu \not\equiv 0$ (dans le cas où on supposerait $c \equiv 0$) il existe un intervalle $[\alpha', \beta']$ tel que $N(v_1) \not\equiv 0$, on peut prolonger $v_1$ en dehors de $[\alpha', \beta']$ de façon à ce que les conditions aux appuis soient satisfaites et $v_1$ est une fonction itérée admissible. Il y a donc contradiction, ce qui démontre le lemme.

2. Si $\mu = c = 0$, reprenant la démonstration par l'absurde, on a

$$\mathsf{S}\,V_1^2(\xi) = \sum m\,v^2 - \sum C\,v^2 = 0\,, \tag{22'}$$

les sommes étant étendues aux disques. Or on peut choisir une fonction itérée telle que $v(x_i) \neq 0$, $v'(x_i) = 0$, $v(x_j) = v'(x_j) = 0$, $j = 1, 2 \ldots i-1, i+1, \ldots, n$ où les $x_j$ sont les abscisses des $n$ disques, sauf le disque $i$. Cette fonction est manifestement une fonction itérée admissible pour laquelle (22′) n'est pas satisfait. Cette contradiction démontre le lemme.

d) Démonstration du Théorème I[1]. Ayant choisi la fonction admissible $U_0(\xi)$, on définit la fonction $N$ par

$$U_0(\xi) - R(U_0)\,\mathop{\mathsf{S}}_{\sigma} K(\xi, \sigma)\,U_0(\sigma) = N(\xi)\,, \tag{26}$$

avec

$$N(\xi) = \begin{cases} \sqrt{m(x)}\,\eta(x)\,, & 0 \leqq \xi < l\,, \\ i\,\sqrt{c(x)}\,\eta'(x)\,, & l < \xi \leqq 2\,l\,. \end{cases}$$

Si $N(\xi) \equiv 0$, le théorème est démontré. Supposons donc $N(\xi) \not\equiv 0$ et considérons le problème auxiliaire défini par l'équation intégrale non-homogène dépendant d'un paramètre réel $\lambda$

$$U(\xi) - \lambda\,\mathop{\mathsf{S}}_{\sigma} K(\xi, \sigma)\,U(\sigma) = N(\xi)\,. \tag{27}$$

$N(\xi)$ est la fonction définie par (26) et $U(\xi) = U(\xi; \lambda)$ dépend du paramètre $\lambda$. Cette fonction $U$, solution de (27) existe tant que $\lambda$ n'est pas une valeur propre de l'équation sans second membre (car dans ce cas, il n'y a pas de solution à l'équation (27) puisque le premier membre serait $\equiv 0$ et le second membre $\not\equiv 0$). A la fonction $U(\xi; \lambda)$ associons la fonction itérée $V(\xi; \lambda) = \mathop{\mathsf{S}}_{\sigma} K(\xi, \sigma)\,U(\sigma; \lambda)$. En particulier, pour $\lambda = R(U_0)$ on a $U = U_0$ et $V = V_0$.

Considérons la fonction auxiliaire $H(\lambda)$ définie par

$$H(\lambda) = \mathop{\mathsf{S}}_{\xi} N(\xi)\,V(\xi; \lambda) = \mathop{\mathsf{S}}_{\xi} U(\xi; \lambda)\,V(\xi; \lambda) - \lambda \mathop{\mathsf{S}}_{\xi}\mathop{\mathsf{S}}_{\sigma} K(\xi; \sigma)\,U(\sigma; \lambda)\,V(\xi; \lambda)\,.$$

Pour $\lambda = 0$,

$$H(0) = \mathop{\mathsf{S}}_{\xi} U(\xi; 0)\,V(\xi; 0) = \mathop{\mathsf{S}}_{\xi}\mathop{\mathsf{S}}_{\sigma} K(\xi, \sigma)\,U(\xi, 0)\,U(\sigma; 0) > 0 \text{ en vertu du lemme 1 (n° 7.b).}$$

[1] Cette démonstration est une adaptation de la démonstration du même théorème établi par *Kamke* [4] dans le cas du problème auto- adjoint défini par une équation différentielle avec ses conditions aux limites, mais sans condition de passage [n° **12**, équation (46)].

Pour $\lambda = R$,

$$H(R) = \sum_{\xi} N(\xi)\, V_0(\xi) = \int U_0(\xi)\, V_0(\xi) - R \int\int K(\xi, \sigma)\, U_0(\sigma)\, V_0(\xi) = 0$$

en vertu de la définition (20) de $R$.

Calculons la dérivée de $H(\lambda)$.

$$\begin{aligned} H(\lambda_2) - H(\lambda_1) &= \sum_{\xi} [V(\xi;\lambda_2) - V(\xi;\lambda_1)]\, N(\xi) \\ &= \sum_{\xi} V(\xi;\lambda_2) \Big[U(\xi;\lambda_1) - \lambda_1 \sum_{\sigma} K(\xi;\sigma)\, U(\sigma;\lambda_1)\Big] \\ &\quad - \sum_{\xi} V(\xi;\lambda_1) \Big[U(\xi;\lambda_2) - \lambda_2 \sum_{\sigma} K(\xi,\sigma)\, U(\sigma;\lambda_2)\Big] \\ &= \sum_{\xi} [V(\xi;\lambda_2)\, U(\xi;\lambda_1) - V(\xi;\lambda_1)\, U(\xi;\lambda_2)] \\ &\quad + \lambda_2 \sum_{\xi}\sum_{\sigma} K(\xi,\sigma)\, U(\sigma;\lambda_2)\, V(\xi;\lambda_1) - \lambda_1 \sum_{\xi}\sum_{\sigma} K(\xi,\sigma)\, U(\sigma;\lambda_1)\, V(\xi;\lambda_2) \\ &= \sum_{\xi}\sum_{\sigma} K(\xi,\sigma)\, [U(\xi;\lambda_1)\, U(\sigma;\lambda_2) - U(\xi;\lambda_2)\, U(\sigma;\lambda_1)] \\ &\quad + \lambda_2 \sum_{\xi} V(\xi;\lambda_1)\, V(\xi;\lambda_2) - \lambda_1 \sum_{\xi} V(\xi;\lambda_2)\, V(\xi;\lambda_1) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) \sum_{\xi} V(\xi;\lambda_1)\, V(\xi;\lambda_2)\,, \end{aligned}$$

car $K$ est symétrique, d'où

$$H'(\lambda) = \sum_{\xi} V^2(\xi;\lambda)\,.$$

1). Supposons que $R(U_0) > 0$.

On a $H'(R) = \int V^2(\xi;R) = \int V_0^2 > 0$ et comme $H(R) = 0$, $H < 0$ à gauche de $R$, soit

$$H(\lambda) = \int\int K(\xi,\sigma)\, U(\xi;\lambda)\, U(\sigma;\lambda) - \lambda \int V^2(\xi;\lambda) < 0$$

à gauche de $R$, ce qui implique, puisque $\lambda > 0$

$$\int V^2(\xi;\lambda) > 0 \text{ à gauche de } R\,.$$

Il faudrait donc que $H(0) < 0$ s'il n'y avait pas de valeur propre entre 0 et $R$, or $H(0) > 0$, il existe donc une valeur propre $\lambda_1$ telle que

$$0 < \lambda_1 \leqq R(U_0)$$

et $\lambda_1 > 0$, car si $\lambda_1 = 0$, il faudrait que le numérateur de (20) soit nul, ce qui n'est pas le cas (lemme 1).

2). Supposons que $R(U_0) < 0$. Un raisonnement analogue montre que dans ce cas

$$0 > \lambda_{-1} \geqq R(U_0)\,.$$

Le théorème est démontré: il existe au moins une valeur propre réelle $\lambda_i$ (ou $\lambda_{-1}$) à laquelle est associée la fonction propre

$$Y_{\pm 1}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{m(x)}\, y_{\pm 1}(x)\,, & 0 \leqq \xi < l \\ i\sqrt{c(x)}\, y'_{\pm 1}(x)\,, & l < \xi \leqq 2\,l \end{cases} \qquad (+1 \text{ pour } \lambda_1 \text{ et } -1 \text{ pour } \lambda_{-1})$$

soit

$$\left.\begin{aligned} y_{\pm 1}(x) &= \lambda_{\pm 1} \sum_{s} \alpha(x,s)\, m(s)\, y_{\pm 1}(s) - \lambda_{\pm 1} \sum_{s} \beta(x,s)\, c(s)\, y'_{\pm 1}(s)\,, \\ y'_{\pm 1}(x) &= \lambda_{\pm 1} \sum_{s} \gamma(x,s)\, m(s)\, y_{\pm 1}(s) - \lambda_{\pm 1} \sum_{s} \delta(x,s)\, c(s)\, y'_{\pm 1}(s)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

e) Corollaire. S'il existe une fonction itérée $V_1$ issue d'une fonction admissible $U_1$ telle que $\int V_1^2(\xi) > 0$, il existe une valeur propre $\lambda_1$ définie par

$$\lambda_1 = \underset{(U,V)}{\text{minimum}}\, R(U, V) \qquad (29)$$

quand on considère l'ensemble des paires de fonctions $(U, V)$ telles que $\int V^2(\xi) > 0$.

De façon analogue, si $\int V_1^2(\xi) < 0$, il existe une valeur propre $\lambda_{-1}$ définie par

$$\lambda_{-1} = \underset{(U,V)}{\text{maximum}}\, R(U, V) \qquad (30)$$

quand on considère l'ensemble des paires de fonctions $(U, V)$ telles que $\int V^2(\xi) < 0$.

En vertu de (8) il est en effet évident que (29) ou (30) prennent leur valeur extremum $\lambda_{\pm 1}$ pour la paire de fonctions $(U, V) = (y_{\pm 1}, \lambda_{\pm 1}\, y_{\pm 1})$.

**9. Lemme III.** Nous supposons explicitement qu'il y a une masse répartie $\mu(x) \not\equiv 0$ ($\mu \in C[a, b]$), et éventuellement $c(x) \not\equiv 0$.

Soient $V_1(\xi), \ldots, V_r(\xi)$, $r$ fonctions itérées telles que

$$\mathsf{S}\, V_p^2(\xi) \neq 0\,, \qquad \mathsf{S}\, V_p(\xi)\, V_q(\xi) = 0\,, \qquad p \neq q\,; \qquad p, q \leqq r\,.$$

Il existe des fonctions admissibles $V$ telles que $\mathsf{S}\, V^2(\xi) \neq 0$ et $\mathsf{S}\, V(\xi)\, V_p(\xi) = 0$, $p = 1, \ldots, r$.

Démonstration. Construisons la fonction itérée

$$V(\xi) = V_0(\xi) + \sum_{p=1}^{r} \varrho_p\, V_p(\xi)\,.$$

On a

$$\mathsf{S}\, V(\xi)\, V_p(\xi) = \mathsf{S}\, V_0(\xi)\, V_p(\xi) + \varrho_p\, \mathsf{S}\, V_p^2(\xi)\,, \qquad p = 1, \ldots, r\,.$$

Exprimons que $V$ est orthogonal à $V_p$: $\mathsf{S}\, V(\xi)\, V_p(\xi) = 0$, soit

$$\varrho_p = -\frac{\mathsf{S}\, V_0(\xi)\, V_p(\xi)}{\mathsf{S}\, V_p^2(\xi)}\,. \tag{31}$$

Il reste à démontrer qu'il existe une fonction $V_0(\xi)$ telle que $\mathsf{S}\, V^2(\xi) \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}\mathsf{S}\, V^2(\xi) &= \mathsf{S}\, V_0^2(\xi) + 2 \sum \varrho_p\, [-\varrho_p\, \mathsf{S}\, V_p^2(\xi)] + \sum \varrho_p^2\, \mathsf{S}\, V_p^2(\xi) \\ &= \mathsf{S}\, V_0^2(\xi) - \sum \varrho_p^2\, \mathsf{S}\, V_p^2(\xi) \\ &= \mathsf{S}\, V_0^2(\xi) - \sum_{p=1}^{r} \frac{[\mathsf{S}\, V_0(\xi)\, V_p(\xi)]^2}{\mathsf{S}\, V_p^2(\xi)}\,.\end{aligned}$$

Nous démontrons cette proposition par contradiction: Supposons que $\mathsf{S}\, V^2(\xi) = 0$ quelle que soit la fonction itérée $V_0(\xi)$. On a

$$\mathsf{S}\, V_0^2(\xi) = \sum_{p=1}^{r} \frac{[\mathsf{S}\, V_0(\xi)\, V_p(\xi)]^2}{\mathsf{S}\, V_p^2(\xi)}\,. \tag{32}$$

L'expression (32) étant vraie quelle que soit la fonction itérée $V_0$, on a en particulier, avec la fonction itérée $V_0 + V'$, $V'$ étant une fonction itérée arbitraire,

$$\begin{aligned}\mathsf{S}(V_0 + V')^2 &= \mathsf{S}\, V_0^2 + 2\, \mathsf{S}\, V_0\, V' + \mathsf{S}\, V'^2 \\ &= \sum_{p=1}^{r} \frac{l}{\mathsf{S}\, V_p^2(\xi)}\, [\mathsf{S}\, (V_0 + V')\, V_p]^2 \\ &= \sum \frac{l}{\mathsf{S}\, V_p^2(\xi)}\, [(\mathsf{S}\, V_0\, V_p)^2 + 2\, \mathsf{S}\, V_0\, V_p\, \mathsf{S}\, V'\, V_p + (\mathsf{S}\, V'\, V_p)^2]\end{aligned}$$

et comme (32) est également applicable à la fonction $V'$ au lieu de $V_0$, il reste

$$\mathsf{S}\, V_0(\xi)\, V'(\xi) = \sum \frac{(\mathsf{S}\, V_0\, V_p)\, (\mathsf{S}\, V'\, V_p)}{\mathsf{S}\, V_p^2}\,,$$

soit

$$\mathsf{S}\, V'\, (V_0 + \sum \varrho_p\, V_p) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathsf{S}\, V'\, V = 0\,, \tag{33}$$

$\varrho_p$ étant défini par (31). (33) est vrai quel que soit $V'$; la démonstration du lemme II [n° 8. c) 1.] peut être appliquée à (33), elle implique que

$$\mu\, v + (c\, v')' = \mu\, (v_0 + \sum \varrho_p\, v_p) + [c\, (v_0 + \sum \varrho_p\, v_p)']' = N(v) \equiv 0$$

quelle que soit la fonction itérée $V_0$. Mais il est manifeste qu'il existe des fonctions $V$ telles que $N(v) \not\equiv 0$, car il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ ne contenant pas de masses concentrées dans lequel $N(v) \neq 0$, il suffit de prolonger la fonction $V$ en dehors de cet intervalle en choisissant $V = 0$, soit $V_0 = -\sum \varrho_p\, V_p$, les conditions aux appuis sont satisfaites, $V_0$ et $V$ sont des fonctions itérées. La contradiction démontre le lemme III.

**10. Definition.** ([4] p. 259).

Si $\lambda$ est une valeur propre et $Y$ une fonction propre qui lui est associée, nous définissons la fonction Sgn par

$$\operatorname{Sgn} \lambda = \frac{\mathsf{S}\, Y^2}{|\mathsf{S}\, Y^2|} = \frac{\mathsf{S}\, m(x)\, y^2 - \mathsf{S}\, c(x)\, y'^2}{|\mathsf{S}\, m(x)\, y^2 - \mathsf{S}\, c(x)\, y'^2|} = \operatorname{signe} \mathsf{S}\, Y^2(\xi)\,. \tag{34}$$

Plusieurs fonctions propres peuvent correspondre à cette valeur propre et il convient de noter que Sgn $\lambda$ est indépendant de la fonction propre choisie qui est associée à $\lambda$ et

$$\operatorname{Sgn}\lambda = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \operatorname{signe}\lambda\,. \tag{34'}$$

En effet, nous savons que $\lambda$ et $\mathsf{S}\, Y^2$ ont le même signe (n° 8).

Le cas des valeurs propres multiples peut se présenter lorsque l'arbre a des appuis d'encastrement intermédiaires de sorte que ni les moments fléchissants, ni les efforts tranchants ne se transmettent au travers de ces appuis. Un tel arbre est alors formé de parties élastiques indépendantes les unes des autres. Si on exclut ce cas (ou si l'on traite chaque partie de l'arbre indépendamment des autres) *Biezeno* [5] a montré que les valeurs propres sont simples (il néglige l'effet raidissant des couples gyrostatiques $Cy'$, mais le résultat est évidemment applicable au cas général traité ici). Nous supposerons par la suite que les valeurs propres sont simples.

**11. Théorème II.** Nous supposons que la masse répartie n'est pas nulle: $\mu(x) \not\equiv 0$, ou que $c(x) \not\equiv 0$, (ou que simultanément $\mu \not\equiv 0$ et $c \not\equiv 0$).

1) Il existe une infinité de valeurs propres, elles peuvent être ordonnées en une suite

$$\ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \tag{35}$$

avec

$$\operatorname{Sgn}\lambda_p = \operatorname{signe} p\,. \tag{36}$$

Cette suite est limitée pour les valeurs propres positives et $\lambda_{-p} \to -\infty$ pour $p \to \infty$.

2) A la suite (35) est associé un système complet de fonctions propres orthonormales

$$\ldots,\ Y_{-2}(\xi),\ Y_{-1}(\xi),\ Y_1(\xi),\ Y_2(\xi),\ldots \tag{37}$$

les conditions d'orthogonalité et de norme étant

$$\mathsf{S}\, Y_p\, Y_q = \delta_{pq} \operatorname{Sgn}\lambda_p\,. \tag{38}$$

3) On a

$$\lambda_p = \underset{(U,V)}{\text{minimum}}\ R(U,V) \tag{39}$$

pour l'ensemble des paires de fonctions admissibles $U$, $V$ lorsqu'il existe une fonction itérée $V_1$ telle que

$$\mathsf{S}\, V_1^2 > 0\,, \quad \mathsf{S}\, V_1\, Y_k = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1\,, \tag{40}$$

et que les fonctions $V$ satisfont à ces conditions;

$$\lambda_{-p} = \underset{(U,V)}{\text{maximum}}\ R(U,V) \tag{39'}$$

pour les fonctions itérées $V$ telles que

$$\mathsf{S}\, V^2 < 0\,, \quad \mathsf{S}\, V\, Y_k = 0\,, \quad k = -1, -2, \ldots, -(p-1)\,, \tag{40'}$$

$R(U, V)$ étant défini par (20).

4) Il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres $> 0$.[1] Ce n'est que lorsqu'il n'existe plus de fonction $V_1$ satisfaisant les conditions (40) que la suite des valeurs propres positives s'interrompt.

Démonstration[2] I. En vertu du lemme II [n° 8. a)] il existe une fonction itérée $V$ telle que $\mathsf{S}\, V^2 \neq 0$. Supposons p. ex. que $\mathsf{S}\, V^2(\xi) > 0$; en vertu du théorème I [n° 8. b)], il existe une valeur propre $\lambda_1$ à laquelle est associée la fonction propre $Y_1(\xi)$. Nous supposons que $\lambda_1$ est une valeur propre simple, et $\lambda_1$ est la valeur propre positive minimum.

II. Le lemme III a montré que si $V_1, \ldots, V_r$ étaient des fonctions itérées telles que

$$\mathsf{S}\, V_p^2 \neq 0 \text{ (si } V_p \text{ est une fonction propre, cette condition est automatiquement satisfaite)}$$

$$\mathsf{S}\, V_p\, V_q = 0\,, \quad p \neq q\,, \quad p, q \leqq r$$

[1] *Van den Dungen* a attiré notre attention sur cette propriété caractéristique du problème qui nous occupe. Dans le cas d'un arbre continu sans disque, elle se démontre aisément. La démonstration de *Grammel* ([1], p. 200—202) ne peut être transposée au cas où le rotor possède des disques, aussi nous démontrerons directement cette propriété.

[2] Fußnote 1 s. S. 374.

il existe des fonctions itérées $V$ telles que

$$\mathsf{S}\, V^2 \neq 0\,, \quad \mathsf{S}\, V\, V_p = 0\,, \qquad p = 1, \ldots, r\,. \tag{41}$$

Supposons le théorème vrai pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, il existe donc une fonction itérée $V$ telle que (41) soit satisfait, $V$ est orthogonal aux $r$ premières fonctions propres. Supposons $\mathsf{S}\, V^2 > 0$, nous montrons que

$$\lambda_{r+1} \leqq R(U, V) \quad \text{et} \quad \lambda_{r+1} = \underset{(U,V)}{\text{minimum}}\, R(U, V)$$

et la fonction propre $Y_{r+1}$ est orthogonale aux fonctions propres $Y_1, \ldots, Y_r$.

$R(U, V)$ est défini par (20), soit

$$R(U, V) = \frac{\mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, U(\xi)\, U(\sigma)}{\mathsf{S}\, V^2(\xi)}\,. \tag{20'}$$

La paire de fonctions $(U, V)$ étant choisie, $R$ est un nombre défini par (20'). Il est évident que $R \geqq \lambda_r$ et nous montrerons en fin de démonstration que $R > \lambda_r$. Nous considérons à nouveau la fonction $N$ définie par

$$U(\xi) - R(U, V) \underset{\sigma}{\mathsf{S}} K(\xi, \sigma)\, U(\sigma) = N(\xi)\,. \tag{42}$$

Si $N(\xi) \equiv 0$ le théorème est démontré, $\lambda_r < R = \lambda_{r+1}$. Supposons donc $N(\xi) \not\equiv 0$ et considérons le problème auxiliaire

$$\widetilde{U}(\xi) - \lambda\, \mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, \widetilde{U}(\sigma) = N(\xi)\,. \tag{43}$$

Ce problème admet la solution $\widetilde{U}(\xi; \lambda)$ tant que $\lambda$ n'est pas valeur propre.

Remarquons d'abord que la fonction $U(\xi)$ dont est issue la fonction itérée $V$ est orthogonale à $Y_1, \ldots, Y_r$. On a

$$V(\xi) = \mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, U(\sigma)$$

et

$$\mathsf{S}\, U(\xi)\, Y_p(\xi) = \lambda_p\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, Y_p(\sigma)\, U(\xi) = \lambda_p\, \mathsf{S}\, V(\sigma)\, Y_p(\sigma) = 0\,, \qquad p = 1, \ldots, r\,.$$

Remarquons ensuite que la solution $\widetilde{U}(\xi; \lambda)$ du problème auxiliaire (43) est également orthogonale aux $r$ fonctions propres $Y_1, \ldots, Y_r$. En effet on a, avec (43) et $Y_p(\xi) = \lambda_p\, \mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, Y_p(\sigma)$, donc $\mathsf{S}\, \widetilde{U}\, Y_p = \lambda_p\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, Y_p(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi)$,

$$\begin{aligned}
\lambda\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, \widetilde{U}(\sigma)\, Y_p(\xi) &= \mathsf{S}\, \widetilde{U}(\xi)\, Y_p(\xi) - \mathsf{S}\, N(\xi)\, Y_p(\xi) \\
&= \lambda_p\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, Y_p(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi) - \underset{\xi}{\mathsf{S}}\, Y_p(\xi) \left[ U(\xi) - R \underset{\sigma}{\mathsf{S}}\, K(\xi, \sigma)\, U(\sigma) \right] \\
&= \lambda_p\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, Y_p(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi) - \mathsf{S}\, Y_p(\xi)\, U(\xi) + R\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, U(\sigma)\, Y_p(\xi) \\
&= \lambda_p\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, Y_p(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi) + 0 + 0
\end{aligned}$$

d'où

$$(\lambda - \lambda_p)\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, Y_p(\xi)\, \widetilde{U}(\sigma) = 0$$

or $\lambda > \lambda_p$ donc $\widetilde{U}$ est orthogonal à $Y_p$, $p = 1, \ldots, r$.

A la solution $\widetilde{U}(\xi; \lambda)$ de (43) associons la fonction itéreé $\widetilde{V}(\xi; \lambda)$ et notons que pour $\lambda = R(U, V)$, on a $\widetilde{U} = U$, $\widetilde{V} = V$.

Considérons encore la fonction auxiliaire $H$ définie par

$$H(\lambda) = \mathsf{S}\, N(\xi)\, \widetilde{U}(\xi; \lambda) = \mathsf{S}\, \widetilde{U}(\xi; \lambda)\, \widetilde{V}(\xi; \lambda) - \lambda\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, \widetilde{U}(\sigma; \lambda)\, \widetilde{V}(\xi; \lambda)\,.$$

Pour $\lambda = R$, $H(R) = 0$.

Pour $\lambda = \lambda_r$,

$$H(\lambda_r) = \mathsf{S}\, \widetilde{U}(\xi; \lambda_r)\, \widetilde{V}(\xi; \lambda_r) - \lambda_r\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, \widetilde{U}(\sigma; \lambda_r)\, \widetilde{V}(\xi; \lambda_r)\,.$$

Calculons le nombre $R$ pour la paire $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ et pour $\lambda = \lambda_r$, soit

$$\mathsf{S}\, \widetilde{U}(\xi; \lambda_r)\, \widetilde{V}(\xi; \lambda_r) = R(\lambda_r)\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, \widetilde{U}(\sigma; \lambda_r)\, \widetilde{V}(\xi; \lambda_r)\,.$$

On a

$$H(\lambda_r) = [R(\lambda_r) - \lambda_r]\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, \widetilde{U}(\sigma; \lambda_r)\, \widetilde{V}(\xi; \lambda_r)\,.$$

Or $R(\lambda_r) \geqq \lambda_r$ donc, en vertu du lemme I, $H(\lambda_r) \geqq 0$. On démontre, comme pour le théorème I, que $H'(\lambda) = \mathsf{S}\, \widetilde{V}(\xi;\lambda)$ et que $H(\lambda) < 0$ et diminue de façon monotone à gauche de $R(U)$ tant que $\lambda \neq$ valeur propre et pour $\lambda \geqq \lambda_r$. Or $H(\lambda_r) \geqq 0$, il existe donc une valeur propre $\lambda_{r+1}$ telle que

$$\lambda_r \leqq \lambda_{r+1} \leqq R(U)\,. \tag{44}$$

Il reste à montrer qu'on a bien $\lambda_r < R(U)$.

Puisque $U$ et $\widetilde{U}$ sont orthogonales à $Y_1, \ldots, Y_r$ et que $U + \varepsilon\, \widetilde{U}$ est admissible quel que soit le nombre réel $\varepsilon$, on a $R(U + \varepsilon\, \widetilde{U}, V + \varepsilon\, \widetilde{V}) \geqq \lambda_r$ pour tout $|\varepsilon|$ suffisamment petit (dans ce cas en effet $R$ reste $> 0$; autrement il pourrait changer de signe), soit explicitement

$$\mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi,\sigma)\,[U(\sigma) + \varepsilon\, \widetilde{U}(\sigma)]\,[U(\xi) + \varepsilon\, \widetilde{U}(\xi)] - \lambda_r\, \mathsf{S}\,[V(\xi) + \varepsilon\, \widetilde{V}(\xi)]^2 \geqq 0$$

ou, en développant

$$\underline{\mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi,\sigma)\, U(\sigma)\, U(\xi)} + 2\,\varepsilon\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi,\sigma)\, U(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi) + \varepsilon^2\, \mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi,\sigma)\, \widetilde{U}(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi)$$
$$- \lambda_r \left[\underline{\mathsf{S}\, V^2(\xi)} + 2\,\varepsilon\, \mathsf{S}\, V(\xi)\, \widetilde{V}(\xi) + \varepsilon^2\, \mathsf{S}\, \widetilde{V}^2(\xi)\right] \geqq 0\,.$$

Nous démontrons maintenant (44) par l'absurde. Supposons que $\lambda_r = R(U)$, les termes soulignés disparaissent et on a

$$2\,\varepsilon\,[\mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi,\sigma)\, U(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi) - \lambda_r\, \mathsf{S}\, V(\xi)\, \widetilde{V}(\xi)] \geqq -\varepsilon^2\,[\mathsf{S}\,\mathsf{S}\, K(\xi,\sigma)\, \widetilde{U}(\sigma)\, \widetilde{U}(\xi) - \lambda_r\, \mathsf{S}\, \widetilde{V}^2(\xi)]\,.$$

Les termes entre crochets sont des nombres fixes, comme $|\varepsilon|$ est arbitrairement petit, et que le signe de $\varepsilon$ est arbitraire, on obtient la contradiction qui démontre (44). Le cas des valeurs propres négatives se traite d'une façon analogue.

En vertu du lemme III, il existe une infinité de valeurs propres lorsqu'il y a des masses réparties. Il reste à montrer qu'il y a un nombre fini de valeurs propres $> 0$. Nous reportons cette question plus loin (n° 14).

**12. Autre mise en équation, équation différentielle.** Nous reportant aux relations (5) et (7), considérons une tranche d'épaisseur $\Delta x$ de l'arbre (figure 4), qui se comporte comme un disque. Si $T$ est l'effort tranchant, le théorème de la résultante cinétique s'écrit

$$0 = T_+ - T_- - \mu\, \Delta x\, (-\omega^2 y)\,, \qquad \text{soit} \qquad \frac{dT}{dx} = -\mu\, \omega^2\, y$$

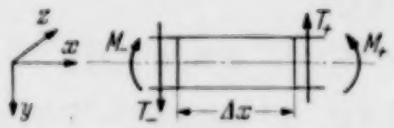



Fig. 4.

et le théorème du moment cinétique s'écrit, $M$ étant le moment fléchissant

$$\frac{d\overline{\mathfrak{M}}_G}{dt} = c\, \Delta x\, \omega^2\, y'\, \bar{1}_z = -\,(M_+ - M_- - T\, \Delta x)\, \bar{1}_z$$

soit

$$\frac{dM}{dx} = -\,c\, \omega^2\, y' + T\,.$$

On a[1]

$$\begin{aligned}(E\, I\, y'')'' &= -\,M'' \\ &= \omega^2 (c\, y')' - T' \\ &= \omega^2 (c\, y')' + \omega^2\, \mu\, y\end{aligned}$$

soit, en posant $\lambda = \omega^2$

$$(E\, I\, y'')'' = \lambda\,[\mu\, y + (c\, y')']\,. \tag{45}$$

C'est l'équation différentielle cherchée.

Si nous considérons une tranche d'épaisseur $\Delta x$, localisée en $x = s$ où se trouve calé un disque, on a

$$\left.\begin{aligned}(E\, I\, y'')'_{s+0} - (E\, I\, y'')'_{s-0} &= \lambda\, m\, y(s)\,, \\ (E\, I\, y'')_{s+0} - (E\, I\, y'')_{s-0} &= \lambda\, C\, y'(s)\,.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

[1] Rappelons encore ici que nous nous limitons à utiliser les équations simplifiées de la résistance des matériaux. Nous négligeons donc la déformation de l'arbre résultant des contraintes tangentielles.

Ce sont les conditions de passage au droit des disques. Il faut encore adjoindre les conditions aux limites. Si p. ex. l'arbre est simplement appuyé:

$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0\,. \tag{47}$$

Le système (45), (46), (47) est équivalent au système (8), ou à l'équation intégrale (9).

Les théorèmes I et II s'écrivent, si $U$ est une fonction admissible et $V$ la fonction itérée telle que $\mathsf{S}\, V^2(\xi) \underset{(<)}{>} 0$

$$\lambda \underset{(>)}{<} \frac{\mathsf{S}\, U\, V}{\mathsf{S}\, V^2} = \frac{S(m\,u\,v - c\,u'\,v')}{S(m\,v^2 - c\,v'^2)}\,(= R(u, v))\,. \tag{48}$$

On a

$$V = \mathsf{S}\, K(\xi, \sigma)\, U(\sigma),$$

soit

$$\left.\begin{aligned} v(x) &= \mathsf{S}\, \alpha(x, s)\, m(s)\, u(s) - \mathsf{S}\, \beta(x, s)\, c(s)\, u'(s)\,, \\ v'(x) &= \mathsf{S}\, \gamma(x, s)\, m(s)\, u(s) - \mathsf{S}\, \delta(x, s)\, c(s),\, u'(s) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

et $v$ est la déformée de l'arbre soumis aux „forces" m $u(s)$ et aux „couples" $-c\,u'(s)$. Calculons $\int_0^l E\,I\,v''^2\,dx$ en transformant cette intégrale par des intégrations par parties, en tenant compte des conditions aux limites et des conditions de passage:

$$\int_0^l E\,I\,v''\,v''\,dx = \sum [E\,I\,v''\,v']_{\cdots}^{\cdots} - \sum [(E\,I\,v'')'\,v]_{\cdots}^{\cdots} + \int_0^l (E\,I\,v'')''\,v\,dx\,.$$

Les termes intégrés sont les sommes

$$\Big[\cdots\Big]_0^{s_1-0} + \Big[\cdots\Big]_{s_1+0}^{s_2-0} + \cdots = -\sum_i \Big[\cdots\Big]_{s_i-0}^{s_i+0}$$

où la somme $\sum_i$ est étendue aux disques. On a donc

$$\int_0^l E\,I\,v''^2\,dx = \sum \Big[v(s)\,(E\,I\,v'')'\Big]_{s_i-0}^{s_i+0} - \sum \Big[v'(s)\,(E\,I\,v'')\Big]_{s_i-0}^{s_i+0} + \int_0^l (EI\,v'')''\,v\,dx\,. \tag{50}$$

On dira que la fonction $v$ est la fonction itérée d'une fonction admissible $u$ du système (45), (46), (47) lorsque

$$(E\,I\,v'')'' = \mu\,u + (c\,u')'$$

$$\Big[(E\,I\,v'')'\Big]_{s-0}^{s+0} = m\,u(s)\,, \qquad \Big[(E\,I\,v'')\Big]_{s-0}^{s+0} = c\,u'(s)\,. \tag{51}$$

(50) s'écrit

$$\int_0^l E\,I\,v''^2\,dx = \sum m(s)\,u(s)\,v(s) - \sum c(s)\,u'(s)\,v'(s) + \int_0^l [\mu\,u + (c\,u')']\,v\,dx$$

$$= \quad \text{idem} \quad - \quad \text{idem} \quad + \int_0^l (\mu\,u\,v - c\,u'\,v')\,dx$$

$$= \mathsf{S}\,(m\,u\,v - c\,u'\,v')$$

et (48) s'écrit

$$\lambda \underset{(>)}{<} \frac{\int_0^l E\,I\,v''^2\,dx}{\mathsf{S}\,(m\,v^2 - c\,v'^2)} = \frac{\Phi(v)}{\Psi(v)} = R(v) \tag{48'}$$

où les fonctionnelles $\Phi$ et $\Psi$ sont définies par (48') et $R(v) = R(u, v) \underset{(<)}{>} 0$.

Les théorèmes I et II ont été démontrés directement à partir de l'équation différentielle auto-adjointe, de ses conditions aux limites et conditions de passage par *Kestens* [6] (Le système (45), (46), (47) n'est qu'un cas particulier d'une théorie générale). Il faut remarquer que les démonstrations de ces théorèmes données ici sont beaucoup plus simples et plus courtes, ce qui en fait l'intérêt. Par contre les démonstrations de la réalité des valeurs propres et des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres sont plus rapides par la méthode qui part de l'équation différentielle avec ses conditions aux limites et de passage [6]. L'interprétation physique de la fonction itérée $v$ issue d'une fonction admissible $u$, suivant le système (51) est évidemment identique à celle donnée par (49).

**13. Interprétation physique des valeurs propres négatives.** Soit $\lambda_{-p} = -\Lambda\,(\Lambda > 0)$ une valeur propre négative. Le système (8) s'écrit

$$y = +\Lambda\,\mathsf{S}\alpha\,(-m\,y) + \Lambda\,\mathsf{S}\beta\,c\,y',$$
$$y' = \Lambda\,\mathsf{S}\gamma\,(-m\,y) + \Lambda\,\mathsf{S}\delta\,c\,y'.$$

Il traduit l'équilibre d'une poutre soumise à des couples $+\Lambda\,c\,y'$ et à des réactions élastiques du sol $\Lambda\,m\,y$ sur lequel elle serait posée (figure 5).

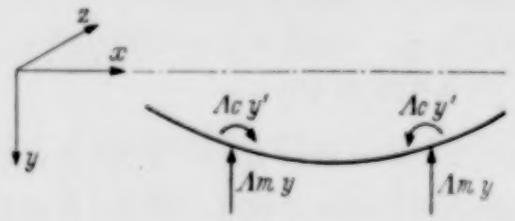


Fig. 5.

**14. Fin de la démonstration du théorème II:** Il y a un nombre fini de valeurs propres positives.

Cette démonstration nécessite l'emploi de deux résultats complémentaires que nous rappelons, sans en reproduire les démonstrations.

1) Théorème de comparaison ([6]): Les conditions aux limites étant les mêmes, supposons deux problèmes ayant même $\Phi(v)$ et tels que

$$\Psi^*(v) \leqq \Psi(v)\,,$$

$\Phi(v)$ et $\Psi(v)$ étant définis par la formule (48′). (Il s'agit donc de deux arbres qui ne diffèrent que par la grandeur des masses $\mu(s)$ et $m(s_i)$ et des différences de moments d'inertie $c(s)$ et $C(s_i)$, mais qui ont même $E\,I(x)$ et qui sont géométriquement les mêmes). On a

$$\lambda_j^* \geqq \lambda_j\,.$$

Ce résultat s'obtient immédiatement de (48′) pour la première valeur propre. Pour les autres, il faut faire appel au théorème du minimum-maximum de *Courant* [6].

2) Un arbre sans volant et tel que $\mu(x) \not\equiv 0$, $c(x) \not\equiv 0$ possède un nombre fini de valeurs propres positives (vitesses critiques) ([1] t. 2, p. 200).

Démonstration: Reprenons le système (45), (46).

I. Considérons $\omega = \sqrt{\lambda}\,(\lambda > 0)$ comme une fonction du paramètre $\mu$, soit plus explicitement, en posant $\mu(x) = k\,\mu_0(x)$, fonction du paramètre $k$ que nous faisons varier de 0 à $+\infty$. Le nombre de vitesses critiques $\omega_j$ variera d'une unité chaque fois qu'il existe une asymptote verticale aux „courbes propres" $\omega_j(k)$, c'est-à-dire s'il existe des $k$ pour lesquels $\omega = \infty$ ([1] p. 200)[1]. Or il est aisé de voir que dans le cas général il n'existe pas d'asymptote. En effet, s'il y en avait, il faudrait, en exprimant que $\lambda = \infty$ ,

$$\mu\,y + (c\,y')' = 0 \qquad \text{ou} \qquad -(c\,y')' = k\,\mu_0\,y\,, \tag{52}$$

conditions aux limites:

$$y(0) = y(l) = 0$$

par exemple, conditions aux disques:

$$y(s_i) = y'(s_i) = 0\,. \tag{52′}$$

$k$ apparaît comme valeur propre d'un problème auxiliaire. Il est manifeste qu'il n'existe pas de solution non triviale au système (52) qui satisfasse aux conditions supplémentaires (52′). Il n'y a donc pas d'asymptote et le nombre des vitesses critiques est constant quel que soit $k$.

Remarquons cependant que les conditions (52′) peuvent être satisfaites individuellement par une solution non triviale et si par exemple tous les $C(s_i)$ sont nuls (les volants se réduisant à des masses localisées), il ne reste comme condition supplémentaire que $y(s_i) = 0$, il peut y avoir des solutions, et le nombre des vitesses critiques variera dans cette éventualité.

[1] Ceci suppose les valeurs propres simples.

Ecartons pour l'instant ce cas:

II. Supposons $m(s_i)\,C(s_i) \not\equiv 0$. Puisque dans ce cas le nombre de vitesses critiques reste constant quel que soit $k$ (c'est-à-dire le nombre de valeurs propres positives) appliquons le théorème de comparaison rappelé ci-dessus d'une part au cas $k = 0$ (le systèmé étudié ayant le même nombre de valeurs propres $\lambda_i > 0$ que celui pour lequel $k = 0$) et d'autre part à l'arbre ne portant que les volants, et supposé tel que $\mu = c = 0$. On a

$$\Psi(y) = -\int_0^l c\,y'^2\,dx + \sum m(s_i)\,y^2(s_i) - \sum C(s_i)\,y'^2(s_i) \leqq \sum m(s_i)\,y^2(s_i) - \sum C(s_i)\,y'^2(s_i) = \Psi^*$$

et donc

$$\lambda_j \geqq \lambda_j^* .$$

On en déduit que le problème dont est issu $\Psi$ a un nombre fini de valeurs propres positives comme l'illustre le schema figure 6. Certaines valeurs propres $\lambda^*$ du problème * de comparaison peuvent être rejetées à $+\infty$ pour $\lambda$, comme certaines valeurs propres $\lambda^* < 0$ peuvent devenir des valeurs propres $\lambda > 0$ (pointillés de la figure 6). Puisqu'il n'y a pas de point d'accumulation des valeurs propres à distance finie (nous avons supposé les valeurs propres simples, mais le théorème II est également vrai dans le cas des valeurs propres multiples [6]), il ne peut y avoir qu'un nombre fini de valeurs propres positives et le nombre de valeurs propres positives du problème considéré ($k \neq 0$) est le même.

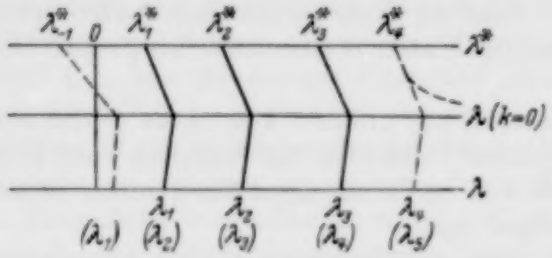



Fig. 6.

Il reste à examiner les cas $m(s_i)\,C(s_i) \equiv 0$ quel que soit $i$. Ces cas III, IV et V ci-dessous échappent à la démonstration II ci-dessus.

III. Supposons $m(s_i) = 0$, $C(s_i) \not\equiv 0$[1]. Comparons ce problème à un problème où $m(s_i) \neq 0$. On a

$$\Psi = \int_0^l (\mu\,y^2 - c\,y'^2)\,dx - \sum C(s_i)\,y'^2(s_i) \leqq \int_0^l (\mu\,y^2 - c\,y'^2)\,dx + \sum m(s_i)\,y^2(s_i) - \sum C(s_i)\,y'^2(s_i) = \Psi^*$$

soit

$$\lambda_j \geqq \lambda_j^* .$$

Or en vertu de II ci-dessus, il y a un nombre fini de valeurs propres $\lambda_j^* > 0$ et la proposition est donc également démontrée dans le cas où $m(s_i) = 0$.

IV. Supposons $m(s_i)\,C(s_i) = 0$ avec $\left.\begin{array}{ll} m(s_i) = 0, & C(s_i) \neq 0 \\ m(s_j) \neq 0, & C(s_j) = 0 \end{array}\right\}$ $i \neq j$

Introduisons des masses $m^*(s_i) \neq 0$ dans le système de comparaison, on a

$$\Psi = \int_0^l (\mu\,y^2 - c\,y'^2)\,dx + \sum m(s_j)\,y^2(s_j) - \sum C(s_i)\,y'^2(s_i) \leqq \int_0^l (\mu\,y^2 - c\,y'^2)\,dx + \sum m(s_j)\,y^2(s_j) + \sum m^*(s_i)\,y^2(s_i) - \sum C(s_i)\,y'^2(s_i) = \Psi^*$$

soit

$$\lambda_j \geqq \lambda_j^*$$

et en vertu de II, le système de comparaison n'a qu'un nombre fini de valeurs propres positives; la proposition est donc démontrée dans ce cas.

V. Enfin, supposons $C(s_i) = 0$, $m(s_i) \not\equiv 0$. On ne peut conclure comme ci-dessus en appliquant le théorème de comparaison, car le seul système de comparaison tel que $\Psi^* \geqq \Psi$ et pour lequel il serait possible de tirer une conclusion est ici le cas où $c(x) \equiv 0$, et il y a une infinité de valeurs propres positives pour ce problème.

[1] Ce cas est purement théorique et n'a pas de réalité physique.

Par contre, en appliquant le théorème de comparaison au système pour lequel $m(s_i) = 0$, on a

$$\Psi^{**} = \int_0^l (\mu y^2 - c y'^2)\, dx \leqq \int_0^l (\mu y^2 - c y'^2)\, dx + \sum m(s_i)\, y^2(s_i) = \Psi$$

soit

$$\lambda_j^{**} \geqq \lambda_j .$$

Il y a un nombre fini de valeurs propres $\lambda_j^{**} > 0$ mais le nombre de valeurs propres $\lambda_j > 0$ n'est pas le même que le nombre de valeurs propres $\lambda_j^{**} > 0$.

Reprenant le raisonnement du début de la démonstration (en I.), il peut exister des valeurs propres $k$ du problème auxiliaire (52) (52′), mais comme les abscisses des asymptotes verticales aux courbes propres $\omega_j(k)$ n'ont pas de point d'accumulation à distance finie, les nombres des valeurs propres positives $\lambda_j$ et $\lambda_j^{**}$ ne peuvent différer que d'un nombre fini.

La proposition est donc démontrée dans tous les cas.

**15. Conclusions.** Les démonstrations que nous avons été amené à développer au sujet du problème particulier des vitesses critiques, s'adaptent sans plus à une large classe de problèmes aux valeurs propres [6]. C'est plutôt comme illustration d'une théorie générale à un cas simple, qu'il faut considérer les développements précédents; ce n'est que le n° 14 qui est particulier au problème traité.

Au point de vue physique, l'introduction de disques, comme d'ailleurs de façon générale l'introduction de masses concentrées dans un système continu quelconque, ne modifie pas l'aspect qualitatif; aussi il n'est pas étonnant que nous retrouvions les propriétés des vitesses critiques d'arbres continus [1], [2].

Au point de vue mathématique par contre, une nette séparation est généralement faite entre les systèmes continus et les systèmes discrets; les premiers sont souvent considérés comme un cas limite des seconds. Du point de vue de l'esthétique des démonstrations, il est cependant satisfaisant de traiter simultanément les deux cas.

A cette fin une première méthode consiste à traiter l'équation différentielle à laquelle sont jointes les conditions aux limites, et les conditions de discontinuité de certaines dérivées aux endroits de masses concentrées. C'est particulièrement dans cette voie qu'on constate que les démonstrations ne sont pas une simple généralisation du cas continu [6]. Une autre méthode consiste à traiter les problèmes aux valeurs propres sous forme d'équation intégrale [3]. Une large classe de problèmes peut ainsi être traitée, en introduisant un noyau réel symétrique, grâce à des changements de variables et de fonctions analogues à ceux du n° 4.

La théorie des équations intégrales à noyaux symétriques est immédiatement applicable. La théorie est également développée pour le cas de noyaux complexes hermitiques: $K(s, t) = \bar{K}(t, s)$. Le problème que nous avons traité est un peu différent puisque nous avons introduit un noyau complexe symétrique. Il est remarquable que les résultats sont également valables dans ce cas.

La méthode des itérations et la détermination de bornes supérieures et inférieures peuvent être aisément transposées. Pour ces questions, nous renvoyons le lecteur à [6].

## Références

[1] *C. B. Biezeno* et *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2de Ed. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1953.
[2] *R. Grammel*, Neuere Untersuchungen über kritische Zustände rasch umlaufender Wellen, Erg. d. exakt. Naturwiss. 1 (1922), p. 92.
[3] *F. H. van den Dungen*, Cours de Technique des Vibrations, Bruxelles 1922.
[4] *E. Kamke*, Math. Zeitschrift 46 (1940), p. 251.
[5] *C. B. Biezeno*, Proc. Akad. Wet. Amsterdam 43 (1940), p. 1144.
[6] *J. Kestens*, Le problème naturel aux valeurs propres, Mémoires de l'Académie Royale de Belgique 1722 (1961) t. 32, fasc. 5.
[7] *H. Ziegler*, On the Concept of Elastic Stability, Advances in Applied Mechanics IV (1956), p. 350—403.
[8] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 10 (1952), p. 377.

(Eingegangen am 6. Oktober 1960.)

Anschrift des Verfassers: *J. Kestens*, Ph. D. Agrégé de l'Université Libre de Bruellxes, Associé du FNRS, Bruxelles (Belgien), 50, avenue F.-D. Roosevelt.

# General Stress-Strain Relations in Non-linear Theory of Viscoelasticity for Large Deformations

By T. Tokuoka

**1. Introduction.** The most general phenomenological one-dimensional linear theory in viscoelasticity has been established mathematically by *B. Gross*[1]. Here a *Maxwell*- or *Voigt* model constituting series or parallel connections of a spring and a dashpot are used. Introducing the relaxation time spectrum and the retardation time spectrum on the basis of the superposition principle, the properties of one-dimensional linear viscoelastic substance are characterized.

Recently, as the result of studying the mechanical behavior of highpolymer for large deformations, the *Weissenberg*-effect and *Poynting*-effect i. e. so-called normal stress effects have been observed; hence it is demanded that the theory of viscoelasticity be extended to three-dimensionality and non-linearity. Here it is required to establish the general three-dimensional non-linear theory of viscoelasticity.

Several papers[2–6] have been presented to extend the viscoelastic theory to three-dimensionality. *M. A. Biot* and *H. Ziegler* study the irreversible process thermodynamically; *W. Olszak* and *P. Perzyna* study the three-dimensional theory by means of operational method, but the above methods are based on linearity i. e. the deviations from the equilibrium state are sufficiently small. Furthermore several attempts[7–10] to generalize the theory to non-linearity are presented, but these are formal generalizations of the fundamental relations of one-dimensional *Maxwell*- and *Voigt* models into three-dimensions, so it is not satisfactory from the physical point of view.

In this paper, we generalize *Novozhilov*'s non-linear theory of elasticity for large deformations[11] into viscoelasticity, and we obtain the general stress-strain relations of the non-linear theory of viscoelasticity for large deformations.

**2. Equilibrium Equations.** With respect to the orthogonal coordinate system $X^i$ $(i = 1, 2, 3)$ fixed in space, a point $x^i$ of the unstrained substance for $t = 0$ transforms to a point $x^{*i}$ for time $t$ as a result of the deformation of the substance.

Then we have

$$\left.\begin{aligned} x^{*i} &= x^{*i}(x^1, x^2, x^3; t) \\ &= x^i + u^i(x^1, x^2, x^3; t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

and

$$u^i(x^1, x^2, x^3; 0) = 0\,.$$

*Generalized strain* components are defined by

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(g_{ij} - \delta_{ij}) \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2}$$

where

$$g_{ij} = x^{*k}_{,i}\, x^{*k}_{,j} \tag{3}$$

and

$$x^{*k}_{,i} = \frac{\partial x^{*k}}{\partial x^i}\,.$$

[1] *B. Gross*, Mathematical Structure of the Theory of Viscoelasticity, Paris 1953.
[2] *M. A. Biot*, J. Appl. Phys. 25 (1954) p. 1385.
[3] *M. A. Biot*, Phys. Rev. 27 (1955) p. 1463.
[4] *M. A. Biot*, J. Appl. Phys. 27 (1956) p. 240.
[5] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 25 (1957) p. 58.
[6] *W. Olszak* and *P. Perzyna*, Ing.-Arch. 28 (1959) p. 246.
[7] *T. Alfrey*, Mechanical Behavior of High Polymers, Interscience Publ. New York 1948.
[8] *W. Segawa*, J. Phys. Soc. Japan 12 (1957) p. 996.
[9] *M. Yamamoto*, J. Phys. Soc. Japan 14 (1959) p. 313.
[10] *W. Segawa*, J. Phys. Soc. Japan 14 (1959) p. 1102.
[11] *V. V. Novozhilov*, Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Rochester, N. Y. 1953.

From its definition the generalized strain tensor is symmetric:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} . \tag{4}$$

In these and following expressions we adopt the so-called Einstein summation convention to simplify mathematical expressions.

Now we consider the equilibrium of an Insert elementary rectangular parallelepiped in the deformed substance, which has the side $dx^{*i}$ parallel to the coordinate axis $X^i$. Moreover $\boldsymbol{\sigma}^{*i}$ is the stress on the plane perpendicular to the $X_i$-axis, $\boldsymbol{F}^*$ is the body force per unit volume and we neglect the inertia force. We can next obtain the generalized equilibrium equations in the same way as in the classical linear theory of elasticity:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{*i}}{\partial x^{*i}} + \boldsymbol{F}^* = 0 . \tag{5}$$

Equating to zero the resultant of the moments of all forces acting on the parallelepiped

$$\sigma^{*ij} = \sigma^{*ji} \tag{6}$$

where $\sigma^{*ij}$ is the component of $\boldsymbol{\sigma}^{*i}$ projecting on the $X^j$-axis.

The equilibrium equations (5) and (6) do not differ in form from the conditions for equilibrium of a parallelepiped derived in the classical linear theory of elasticity. They differ in essence, however, because in the linear theory of elasticity, the change in position of the points of the body due to its deformation are neglected.

Equation (5) is expressed in *Euler*'s representation, so we will transform the equilibrium equation (5) into *Lagrange*'s representation.

Now from (1) we obtain

$$\left.\begin{aligned} dx^{*i} &= x^{*i}_{,j}\, dx^j \\ \text{or} \qquad dx^j &= x^j_{,*i}\, dx^{*i} = \frac{A^j_i}{D}\, dx^{*i} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

where

$$x^j_{,*i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{*i}} , \qquad D = \det (x^{*i}_{,j})$$

is the volume dilatation factor and $A^j_i$ is a cofactor with respect to the $x^{*i}_{,j}$ element of $D$. According to the mathematical relations $\partial A^j_i / \partial x^j = 0$, the equilibrium equation (5) is transformed into

$$\frac{\partial (A^j_i\, \boldsymbol{\sigma}^{*i})}{\partial x^j} + D\, \boldsymbol{F}^* = 0 ; \tag{8}$$

here, the independent variables are $x^1, x^2, x^3$ in *Lagrange*'s representation.

Let us denote the fixed unit vector along the $X^i$-axis by $\boldsymbol{e}_i$ and the unit vector in the direction of that axis after deformation by $\boldsymbol{i}_i$; so from (7)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}_i &= \frac{x^{*j}_{,i}}{\sqrt{g_{ii}}}\, \boldsymbol{e}_j \\ \text{or} \qquad \cos (\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{e}_j) &= \frac{x^{*j}_{,i}}{\sqrt{g_{ii}}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(no summation on } i\text{)} \tag{9}$$

where $(\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{e}_j)$ denotes the angle between the vectors $\boldsymbol{i}_i$ and $\boldsymbol{e}_j$.

Let us denote the unit vector perpendicular to two directions $\boldsymbol{i}_i$ and $\boldsymbol{i}_j$ by $\boldsymbol{n}_k$ [here, $(i, j, k)$ is a cyclic permutation of $(1, 2, 3)$]. From the relations

$$\boldsymbol{n}_k \sin (\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j) = \boldsymbol{i}_i \times \boldsymbol{i}_j$$

and

$$\sin (\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j) = \frac{\sqrt{g_{ii} g_{jj} - (g_{ij})^2}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \qquad \text{(no summation on } i \text{ and } j\text{)}$$

it follows that

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{n}_k, \boldsymbol{e}_l) &= \boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{e}_l \\ &= \frac{1}{\sin(\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j)} \boldsymbol{e}_l \cdot (\boldsymbol{i}_i \times \boldsymbol{i}_j) \\ &= \frac{x^{*m}_{,i}\, x^{*n}_{,j}}{\sqrt{g_{ii}\, g_{jj} - (g_{ij})^2}} \boldsymbol{e}_l \cdot (\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{e}_n) \\ &= \frac{A^k_l}{\sqrt{g_{ii}\, g_{jj} - (g_{ij})^2}} \qquad \text{(no summation on } i \text{ and } j\text{)} \\ &= \frac{S^k}{S^{*k}} A^k_l \qquad \text{(no summation on } k\text{)}\end{aligned}$$

where

$$\frac{S^{*k}}{S^k} = \sqrt{g_{ii}\, g_{jj}} \sin(\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j) = \sqrt{g_{ii}\, g_{jj} - (g_{ij})^2} \qquad \text{(no summation on } i, j \text{ and } k\text{)}$$

is the ratio of the area perpendicular to the $X^k$-axis before deformation to its area after deformation.

Then the stress $\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}{}^k$ on the plane which have a perpendicular $\boldsymbol{n}_k$ is

$$\begin{aligned}\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}_k &= \boldsymbol{\sigma}^{*l} \cos(\boldsymbol{n}_k, \boldsymbol{e}_l) \\ &= \frac{A^k_l}{\sqrt{g_{ii}\, g_{jj} - (g_{ij})^2}} \boldsymbol{\sigma}^{*l} \\ &= \frac{S^k}{S^{*k}} A^k_l \boldsymbol{\sigma}^{*l} \qquad \text{(no summation on } k\text{)}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Therefore the equilibrium equation (8) is reduced to

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{S^{*j}}{S^j} \overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}{}^j\right) + D\boldsymbol{F}^* = 0\,. \tag{11}$$

Resolve the vector $\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}{}^j$ in the direction $\boldsymbol{i}_l$ and denote its component by $\overset{n}{\sigma}{}^{jl}$:

$$\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}{}^j = \overset{n}{\sigma}{}^{jl} \boldsymbol{i}_l = \frac{x^{*i}_{,l}}{\sqrt{g_{ll}}} \overset{n}{\sigma}{}^{jl} \boldsymbol{e}_i\,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{S^{*j}}{S^j} \frac{x^{*i}_{,l}}{\sqrt{g_{ll}}} \overset{n}{\sigma}{}^{jl} \boldsymbol{e}_i\right) + D\boldsymbol{F}^* = 0\,. \tag{13}$$

Projecting this equation on the $X^i$-axis, we have

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x^{*i}_{,l}\, \tau^{*jl}) + D F^{*i} = 0 \tag{14}$$

where

$$\tau^{*ij} = \frac{S^{*i}}{S^i} \cdot \frac{\overset{n}{\sigma}{}^{ij}}{\sqrt{g_{jj}}} \qquad \text{(no summation on } i \text{ and } j\text{)}\,. \tag{15}$$

Now the magnitude $\tau^{*ij}$ can be represented in terms of the stress $\sigma^{*ij}$. Multiplying the both sides of (12) by a vector $\boldsymbol{e}_i$ and a cofactor $A^l_i$ and then summing with respect to $i$, we obtain

$$\overset{n}{\sigma}{}^{jl} = \frac{\sqrt{g_{ll}}\, A^l_i}{D} \overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}{}^j \cdot \boldsymbol{e}_i \qquad \text{(no summation on } l\text{)}$$

and substituting (10) into the above equation,

$$\begin{aligned}\overset{n}{\sigma}{}^{jl} &= \frac{S^j}{S^{*j}} \cdot \frac{\sqrt{g_{ll}}\, A^j_m A^l_i}{D} \boldsymbol{\sigma}^{*m} \cdot \boldsymbol{e}_i \\ &= \frac{S^j}{S^{*j}} \cdot \frac{\sqrt{g_{ll}}\, A^j_m A^l_i}{D} \sigma^{*mi} \qquad \text{(no summation on } j \text{ and } l\text{)}\,.\end{aligned}$$

Therefore substituting this relation into (15), $\tau^{*ij}$ is reduced to the following expression:

$$\tau^{*ij} = \frac{A_l^i A_m^j}{D} \sigma^{*lm}, \tag{16}$$

so that

$$x_{,l}^{*i} \tau^{*jl} = A_m^j \sigma^{*im}. \tag{17}$$

These are the relations which relate the magnitudes $\tau^{*ij}$ to the stresses $\sigma^{*ij}$.

The magnitudes $\tau^{*ij}$ defined by (16) are *generalized stesses* and are symmetric with respect to suffixes $i$ and $j$ from (6).

Writing (14) in more compact form, we define

$$\boldsymbol{T}^i = (x_{,l}^{*i} \tau^{*jl}) \boldsymbol{e}_j \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{18}$$

then we have

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T}^i + D F^{*i} = 0. \tag{19}$$

This is the equilibrium equation, expressed in *Lagrange*'s representation, for the case of the most general deformation of the substance.

**3. Hamilton's Principle.** Now we consider an arbitrary region $V$ (before deformation) in the substance and its surface $S$; the surface force is given on the portion $S_f$ of $S$. The substance which is in unstrained state at time $t = 0$, deforms viscoelastically to time $t$. $A(t)$ denotes the cumulative elastic energy in the region $V$ from the unstrained state ($t = 0$) to the strained state (time $t$); $R_1(t)$ and $R_2(t)$ are the work done on the substance by the body and surface forces respectively; $B(t)$ is the rate of dissipation of energy in the region $V$ at the time $t$; $\Phi$ is the *elastic potential* i. e. the elastic (recoverable) energy per unit volume before deformation; and $\Psi$ is the *dispation function*, i. e. the rate of dissipative energy per unit volume before deformation.
Then

$$A = \iiint_V \Phi \, dV, \qquad B = \iiint_V \Psi \, dV. \tag{20}$$

From the law of energy conservation, we have

$$A(t) + \int_0^t B(t') \, dt' - [R_1(t) + R_2(t)] = 0, \tag{21}$$

where we suppose that the deformation is adiabatic.

Now we assign to the displacements $u^i$ arbitrary virtual increments $\delta u^i$ ($\delta u^i = 0$ at time 0, $t$) and assume that the state of the body satisfies the following variational equation from Hamilton's principle:

$$\delta \int_0^t \left\{ A(t') + \int_0^{t'} B(t'') \, dt'' - [R_1(t') + R_2(t')] \right\} dt' = 0,$$

i. e.

$$\int_0^t \left\{ \delta A(t') + \int_0^{t'} \delta B(t'') \, dt'' - [\delta R_1(t') + \delta R_2(t')] \right\} dt' = 0. \tag{22}$$

We may regard this equation as *generalized Hamilton's principle.*

From (20)

$$\delta A = \iiint_V \delta \Phi \, dV, \qquad \delta B = \iiint_V \delta \Psi \, dV, \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta R_1 &= \iiint_V (F^{*i} \delta u^i) \, D \, dV, \\ \delta R_2 &= \iint_{S_f} (f^{*i} \delta u^i) \, d\Omega^* = \iint_{S_f} (f^{*i} \delta u^i) \frac{S^{*n}}{S^n} \, d\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

where $f^{*i}$ is a component along the $X^i$-axis of the surface force acting on a unit area of the surface of the deformed body, $d\Omega^*$ is the differential of this area, and the coefficient $S^{*n}/S^n$ is the ratio of the elements of area in the terminal and initial states.

Furthermore we adopt the important assumption that the elastic potential depends only upon the strain and not upon rate of strain. However, the dissipation function is a function of both strain and rate of strain:

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}), \tag{25}$$

$$\Psi = \Psi(\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{ij}). \tag{26}$$

Then, these variations are

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\,\delta\varepsilon_{ij} \tag{27}$$

and

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}}\,\delta\varepsilon_{ij} \tag{28}$$

From (2), (3) and (1), the strain $\varepsilon_{ij}$ is represented by the displacements $u^i$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u^j_{,i} + u^i_{,j} + u^k_{,i}\,u^k_{,j})\ ;$$

its variation is

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\,[(\delta u^j)_{,i} + (\delta u^i)_{,j} + (\delta u^k)_{,i}\,u^k_{,j} + u^k_{,i}(\delta u^k)_{,j}] \\ &= \frac{1}{2}\,[x^{*k}_{,j}(\delta u^k)_{,i} + x^{*k}_{,i}(\delta u^k)_{,j}]\,.\end{aligned}$$

Substituting this into (27), we obtain the variation of elastic potential $\Phi$:

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= x^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{kj}}\,(\delta u^i)_{,j} \\ &= \boldsymbol{P}^i\cdot\operatorname{grad}(\delta u^i) \\ &= \operatorname{div}(\boldsymbol{P}^i\,\delta u^i) - (\operatorname{div}\boldsymbol{P}^i)\,\delta u^i\,,\end{aligned} \tag{29}$$

where

$$\boldsymbol{P}^i = \left(x^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{kj}}\right)\boldsymbol{e}_j \qquad (i=1,2,3)\,. \tag{30}$$

So the variation of cumulated elastic energy in the region $V$ is

$$\delta A = -\iiint_V (\operatorname{div}\boldsymbol{P}^i)\,\delta u^i\,dV + \iint_{S_f} (\boldsymbol{P}^i)_n\,\delta u^i\,\delta\Omega\,, \tag{31}$$

because the volume integral of the divergence of a vecter can be reduced by *Gauss*' theorem to a surface integral; where $(\boldsymbol{P}^i)_n$ is the projection of the vector $\boldsymbol{P}^i$ on the exterior normal to the bounding surface.

Namely the variation of rate of strain is

$$\begin{aligned}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\,\delta\,(\dot{u}^j_{,i} + \dot{u}^i_{,j} + \dot{u}^k_{,i}\,u^k_{,j} + u^k_{,i}\,\dot{u}^k_{,j}) \\ &= \frac{1}{2}\,[x^{*k}_{,i}(\delta\dot{u}^k)_{,j} + x^{*k}_{,j}(\delta\dot{u}^k)_{,i}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\,[\dot{x}^{*k}_{,i}(\delta u^k)_{,j} + \dot{x}^{*k}_{,j}(\delta u^k)_{,i}]\,.\end{aligned}$$

Substituting this into (28), we obtain the variation of dissipation function $\Psi$:

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= x^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\varepsilon}_{kj}}\,(\delta\dot{u}^i)_{,j} + \left(\dot{x}^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\varepsilon}_{kj}} + x^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{kj}}\right)(\delta u^i)_{,j} \\ &= \boldsymbol{U}^i\cdot\operatorname{grad}(\delta\dot{u}^i) + \boldsymbol{V}^i\cdot\operatorname{grad}(\delta u^i) \\ &= -(\operatorname{div}\boldsymbol{U}^i)\,\delta\dot{u}^i - (\operatorname{div}\boldsymbol{V}^i)\,\delta u^i \\ &\quad + \operatorname{div}(\boldsymbol{U}^i\,\delta\dot{u}^i) + \operatorname{div}(\boldsymbol{V}^i\,\delta u^i)\,,\end{aligned} \tag{32}$$

where

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}^i &= \left(x^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\varepsilon}_{kj}}\right)\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{V}^i &= \left(\dot{x}^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\varepsilon}_{kj}} + x^{*i}_{,k}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{kj}}\right)\boldsymbol{e}_j\,.\end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3)\,. \tag{33}$$

Therefore the variation of the rate of dissipation of energy in the region $V$ is

$$\begin{aligned}\delta B &= -\iiint_V (\operatorname{div}\boldsymbol{U}^i)\,\delta\dot{u}^i\,dV - \iiint_V (\operatorname{div}\boldsymbol{V}^i)\,\delta u^i\,dV \\ &\quad + \iint_{S_f} (\boldsymbol{U}^i)_n\,\delta\dot{u}^i\,d\Omega + \iint_{S_f} (\boldsymbol{V}^i)_n\,\delta u^i\,d\Omega\,.\end{aligned}$$

Since the variation of displacement $\delta u^i$ vanishes at the time 0,

$$\begin{aligned}\int_0^{t'} \delta B(t'')\, dt'' &= \Big[-\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{U}^i)\, \delta u^i\, dV + \iint_{S_f} (\boldsymbol{U}^i)_n\, \delta u^i\, d\Omega\Big]_{t=t'} \\ &\quad + \int_0^{t'} \Big\{\iiint_V \left[\operatorname{div}\left(\dot{\boldsymbol{U}}^i - \boldsymbol{V}^i\right)\right] \delta u^i\, dV - \iint_{S_f} \left(\dot{\boldsymbol{U}}^i - \boldsymbol{V}^i\right)_n \delta u^i\, d\Omega\Big\}_{t=t''} dt'' \\ &= \Big[-\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{U}^i)\, \delta u^i\, dV + \iint_{S_f} (\boldsymbol{U}^i)_n\, \delta u^i\, d\Omega\Big]_{t=t'} \\ &\quad + \int_0^{t'} \Big[\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{W}^i)\, \delta u^i\, dV - \iint_{S_f} (\boldsymbol{W}^i)_n\, \delta u^i\, d\Omega\Big]_{t=t''} dt'' , \qquad (34)\end{aligned}$$

where

$$\boldsymbol{W}^i = \dot{\boldsymbol{U}}^i - \boldsymbol{V}^i = x^{*i}_{,k} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{kj}}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{kj}}\right] \boldsymbol{e}_j \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \qquad (35)$$

Substituting (31), (34) and (24) into (22), we obtain

$$\begin{aligned}&\int_0^t \Big\{-\iiint_V \left[\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^i + \boldsymbol{U}^i\right) + D F^{*i}\right] \delta u^i\, dV + \iint_{S_f} \left[\left(\boldsymbol{P}^i + \boldsymbol{U}^i\right)_n - \frac{S^{*n}}{S^n} f^{*i}\right] \delta u^i\, d\Omega\Big\}_{t=t'} dt' \\ &\quad + \int_0^t dt' \int_0^{t'} \Big[\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{W}^i)\, \delta u^i\, dV - \iint_{S_f} (\boldsymbol{W}^i)_n\, \delta u^i\, d\Omega\Big]_{t=t''} dt'' = 0\,. \qquad (36)\end{aligned}$$

The above equation should be valid for arbitrary value of the variations of displacement $\delta u^i$; then we obtain

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^i + \boldsymbol{P}^i\right) + D F^{*i} = 0\,, \qquad (37)$$

$$\left(\boldsymbol{P}^i + \boldsymbol{U}^i\right)_n - \frac{S^{*n}}{S^n} f^{*i} = 0 \qquad (38)$$

and

$$\boldsymbol{W}^i = 0\,. \qquad (39)$$

**4. General Stress-Strain Relations.** By comparison with the equations (19) and (37), we can deduce the stress-strain relations:

$$\boldsymbol{T}^i = \boldsymbol{P}^i + \boldsymbol{U}^i\,, \qquad (40)$$

In order to express these relations in terms of components, we substitute (18), (30) and (33) into (40),

$$x^{*i}_{,k}\, \tau^{*jk} = x^{*i}_{,k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kj}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{kj}}\right).$$

i. e.

$$\tau^{*ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}\,. \qquad (41)$$

These are the required general stress-strain relations, which show clearly that the generalized stress tensor $(\tau^{*ij})$ is symmetric. This equation expresses the so-called generalized Lagrangian form of viscoelasticity.

It can be seen from (41) that the stress $\tau^{*ij}(t)$ is expressed as a summation of a term only depending on the elastic potential $\Phi$ at time $t$, and a term only depending on the dissipative function $\Psi$ at time $t$. Now we denote

$$\overset{e}{\tau}{}^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\,, \qquad \overset{v}{\tau}{}^{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}\,, \qquad (42)$$

then

$$\tau^{*ij} = \overset{e}{\tau}{}^{ij} + \overset{v}{\tau}{}^{ij}\,. \qquad (43)$$

These relations express no more than a *generalized Voigt model*, and indicate that the stress-strain relations should reduce to a *Voigt* model in the limiting case of the assumptions (25) and (26). Equation (43) is the fundamental assumption that *M. Yamamoto*[1] and *W. Segawa*[2] adopt formally as the stress equation for the three-dimensional *Voigt* model in their papers.

[1] Cf. footnote 9 on page 385.
[2] Cf. footnote 10 on page 385.

From (38) and (40), the boundary conditions on the body surface $S_f$ are

$$(T^i)_n - \frac{S^{*n}}{S^n} f^{*i} = 0 . \tag{44}$$

The viscoelastic condition (39) is reduced to

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 . \tag{45}$$

The physical meaning of the above condition should be investigated thermodynamically.

**5. Isotropic Substance.** We consider now the isotropic substance with respect to the rate of strain as well as the strain itself. We denote that

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon_{ll} , \\ a_2 &= \frac{1}{2!}\,\delta^{lm}_{pq}\,\varepsilon_{lp}\,\varepsilon_{mq} , \\ a_3 &= \frac{1}{3!}\,\delta^{lmn}_{pqr}\,\varepsilon_{lp}\,\varepsilon_{mq}\,\varepsilon_{nr} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

and

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \dot{\varepsilon}_{ll} , \\ b_2 &= \frac{1}{2!}\,\delta^{lm}_{pq}\,\dot{\varepsilon}_{lp}\,\dot{\varepsilon}_{mq} , \\ b_3 &= \frac{1}{3!}\,\delta^{lmn}_{pqr}\,\dot{\varepsilon}_{lp}\,\dot{\varepsilon}_{mq}\,\dot{\varepsilon}_{nr} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

whare $a_1$, $a_2$, $a_3$ are the strain invariants with respect to an orthogonal transformation of coordinates, $b_1$, $b_2$, $b_3$ are the rate of strain invariants with respect to the same transformation, and $\delta^{lmn\ldots}_{pqr\ldots}$ is a generalized *Kronecker* delta.

Assuming that

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \Phi(a_1, a_2, a_3) , \\ \Psi &= \Psi(b_1, b_2, b_3; a_1, a_2, a_3) ; \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

then

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial \varepsilon_{ij}} , \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = \frac{\partial \Psi}{\partial b_m}\frac{\partial b_m}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \tag{49}$$

and

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \delta^i_j , & \frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \delta^{im}_{jq}\,\varepsilon_{mq} , & \frac{\partial a_3}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{1}{2}\,\delta^{imn}_{jqr}\,\varepsilon_{mq}\,\varepsilon_{nr} , \\ \frac{\partial b_1}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} &= \delta^i_j , & \frac{\partial b_2}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} &= \delta^{im}_{jq}\,\dot{\varepsilon}_{mq} , & \frac{\partial b_3}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} &= \frac{1}{2}\,\delta^{imn}_{jqr}\,\dot{\varepsilon}_{mq}\,\dot{\varepsilon}_{nr} . \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Substituting (49) and (50) into (41), the stress-strain relations of the isotropic substance can be characterized by the six invariants $\partial\Phi/\partial a_m$, $\partial\Psi/\partial b_m$ $(m = 1, 2, 3)$, which are specified by the properties of a given substance.

We can rewrite the Lagrangian form (41) in matrix representation by putting

$$(\tau^{*ij}) = \mathbf{T} , \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} (\delta^i_j) &= \mathbf{I} , & (\delta^{im}_{jq}\,\varepsilon_{mq}) &= \mathbf{A}_2 , & \left(\frac{1}{2}\,\delta^{imn}_{jqr}\,\varepsilon_{mq}\,\varepsilon_{nr}\right) &= \mathbf{A}_3 , \\ & & (\delta^{im}_{jq}\,\dot{\varepsilon}_{mq}) &= \mathbf{B}_2 , & \left(\frac{1}{2}\,\delta^{imn}_{jqr}\,\dot{\varepsilon}_{mq}\,\dot{\varepsilon}_{nr}\right) &= \mathbf{B}_3 . \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Then the stress-strain relation is

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_1}\mathbf{I} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_2}\mathbf{A}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial a_3}\mathbf{A}_3 + \frac{\partial \Psi}{\partial b_1}\mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial b_2}\mathbf{B}_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial b_3}\mathbf{B}_3 . \tag{53}$$

Namely, the stress is a linear function of $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{B}_2$ and $\mathbf{B}_3$, and this coefficients are the strain invariants, or the rate of strain invariants, which are specified by the substance.

**6. The Case of Small Strains and Small Rates of Strain.** When the elongations, shears and angles of rotation are small, the second order or more of strain components and angles of rotation can be neglected. So from (2) the generalized strain component $\varepsilon_{ij}$ is reduced to

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u^j_{,i} + u^i_{,j}) = e_{ij}\,, \tag{54}$$

where $e_{ij}$ is the ordinary classical strain component. It is easily verified that the rates of the area $S^{*i}/S^i$ $(i = 1, 2, 3)$ and the volume dilatation factor $D = V^*/V$ differ from unity only by magnitudes of the same order as the elongations and shears. Also the matrices $(x^{*i}_{,j})$ and $(A^i_j)$ differ from the unit matrix only by magnitudes of the same order as the elongations and shears.

Then from (16) and (17)

$$x^{*i}_{,l}\,\tau^{*jl} \approx \tau^{*ji} \approx \sigma^{*ji} \approx \sigma^{ij}\,, \tag{55}$$

where $\sigma^{ij}$ is the ordinary classical stress component which acts on the plane before deformation. The specific body force per unit volume after deformation $\boldsymbol{F}^*$ is approximately equal to $\boldsymbol{F}$ which is the specific body force per unit volume before deformation. i. e.

$$D\boldsymbol{F}^* \approx \boldsymbol{F}^* \approx \boldsymbol{F}\,. \tag{56}$$

Substituting (55) and (56) into (14), the equlibrium equation is reduced to

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + F^i = 0\,. \tag{57}$$

This is identical with the equilibrium equation of the classical theory of elasticity.

Let us expand the functions $\Phi$ and $\Psi$ in a power series in the strains $e_{ij}$ and rates of strain $\dot{e}_{ij}$ respectively. No negative powers can appear in the series, for otherwise the elastic potential and the dissipation function would tend to infinity for infinitesimal displacements or infinitesimal rates of displacement of the points of the substance from their initial undeformed stationary position. Furthermore, if the substance is free of all stresses in the vanished strain or vanished rate of strain state, then we must begin the two series with the second power terms.

Thus we can write

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2!}\,\eta^{ij,kl}\,e_{ij}\,e_{kl} + \frac{1}{3!}\,\eta^{ij,kl,mn}\,e_{ij}\,e_{kl}\,e_{mn} + \ldots\,, \\ \Psi &= \frac{1}{2!}\,\mu^{ij,kl}\,\dot{e}_{ij}\,\dot{e}_{kl} + \frac{1}{3!}\,\mu^{ij,kl,mn}\,\dot{e}_{ij}\,\dot{e}_{kl}\,\dot{e}_{mn} + \ldots\,, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

so that

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}} &= \eta^{ij,kl}\,e_{kl} + \eta^{ij,kl,mn}\,e_{kl}\,e_{mn} + \ldots\,, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_{ij}} &= \mu^{ij,kl}\,\dot{e}_{kl} + \mu^{ij,kl,mn}\,\dot{e}_{kl}\,\dot{e}_{mn} + \ldots\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Neglecting the terms of the second or higher power in (59) and substituting (55) and (59) into (41), we have

$$\sigma^{ij} = \eta^{ij,kl}\,e_{kl} + \mu^{ij,kl}\,\dot{e}_{kl}\,, \tag{60}$$

which are the linear stress-strain relations of a three-dimensional anisotropic *Voigt* substance. The viscous coefficient $\mu^{ij,kl}$ is in general a function of the strains; but when the dissipation function is independent of the strain, the coefficient $\mu^{ij,kl}$ is a constant which is specified by a given substance.

Furthermore, if the substance is isotropic with respect to strain and rate of strain, the elastic potential and the dissipation function are reduced to

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\varphi_1\,a_1^2 + \varphi_2\,a_2\,, \qquad \Psi = \frac{1}{2}\,\psi_1\,b_1^2 + \psi_2\,b_2\,, \tag{61}$$

where $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ and $\psi_2$ are all constants which are specified by the properties of the given substance.

Then (53) is reduced to

$$\mathbf{T} = \varphi_1 a_1 \mathbf{I} + \varphi_2 \mathbf{A}_2 + \psi_1 b_1 \mathbf{I} + \psi_2 \mathbf{B}_2 , \tag{62}$$

namely

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix} = \varphi_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_1 & \\ 0 & & a_1 \end{pmatrix} + \varphi_2 \cdot \begin{pmatrix} e_{22} + e_{23} & -e_{12} & -e_{13} \\ -e_{21} & e_{33} + e_{11} & -e_{23} \\ -e_{31} & -e_{32} & e_{11} + e_{22} \end{pmatrix}$$
$$+ \psi_1 \cdot \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_1 & \\ 0 & & b_1 \end{pmatrix} + \psi_2 \cdot \begin{pmatrix} \dot{e}_{22} + \dot{e}_{33} & -\dot{e}_{12} & -\dot{e}_{13} \\ -\dot{e}_{21} & \dot{e}_{33} + \dot{e}_{11} & -\dot{e}_{23} \\ -\dot{e}_{31} & -\dot{e}_{32} & \dot{e}_{11} + \dot{e}_{22} \end{pmatrix}. \tag{63}$$

After simple calculations we obtain the following compact stress-strain relations:

$$\sigma^{ij\prime} = 2G e'_{ij} + 2\mu \dot{e}'_{ij} , \tag{64}$$

where

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{ij\prime} &= \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \Theta \delta^{ij} , \\ \Theta &= \sigma^{kk} , \\ e'_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{3} a_1 \delta_{ij} , \\ 2G &= -\varphi_2 , \\ 2\mu &= -\psi_2 , \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

and $\sigma^{ij\prime}$, $e'_{ij}$ are the deviatoric stress component and the deviatoric strain component respectively.

This is a *Voigt* model which consists of a purely elastic spring with shear modulus $G$ in parallel with a dashpot containing a purely viscous liquid of viscosity $\mu$, and the spring obeys *Hooke*'s law for elasticity and the dashpot obeys *Newton*'s law for viscosity.

**7. Conclusion.** General phenomenoligical stress-strain relations in non-linear theory of viscoelasticity for large deformations have been presented.

In the first place, according to *V. V. Novozhilov*[1] we express the generalized equilibrium equation for large deformations in the *Lagrange* representation, and we apply the generalized *Hamilton's* principle to the equation of energy conservation, which denotes that the sum of the elastic energy and the dissipative energy is equal to the work done by the body force and the surface on the substance; so that we obtain the required general stress-strain relations in comparison with the above two equations.

On the condition that the elastic potential is a function only of the strain, and the dissipation function is a function of the rate of strain and of strain; such a substance is reduced to the *Voigt* material necessarily, and the stresses which act on the substance are given by the sum of elastic- and viscous stresses, and the stress-strain relations are reduced to the so-called Lagrangian form.

If elongations, shears and angles of rotation are small and also the strains and rates of strain are sufficiently small, the stress-strain relations are expressed by a linear *Voigt* model constituting a Hookian spring in parallel with a Newtonian dashpot.

Non-linearity in the theory is classified into two groups i. e. the geometrical non-linearity and the physical non-linearity. The former is introduced into the theory through the definition of the generalized strain and of the generalized stress and through the equilibrium equation for large deformation, and the latter through the general stress-strain relations.

The main result of this paper is that the general stress-strain relations in viscoelasticity are deduced necessarily from the physically appropriate assumptions.

(Eingegangen am 11. Oktober 1960)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Tatsuo Tokuoka*, Kyoto (Japan) Shijo-horikawa agaru, Nakagyo-ku.

[1] Of footnote 11 on page 385.

# Grundsätzliche Lösung des Problems der freien Kippung rechteckiger Rahmen mit doppelt-symmetrischen Querschnitten

Von **L. Kraus**

*Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Karas zum 70. Geburtstag*

**1. Einleitung.** Das Problem der Rahmenkippung wurde von *Chwalla*[1], *Schoblik*[2] und *Eßlinger*[3] untersucht. *Chwalla* und *Schoblik* behandeln einen rechteckförmigen Dreigelenkrahmen mit Hilfe der elastostatischen Grundgleichungen. Zur Berechnung der Kippkräfte eines solchen Rahmens mit Rechteckquerschnitt (Abb. 1) verwendet *Chwalla* Potenzreihen[1]; *Schoblik* bringt die Kipp-Gleichungen in die Form einer Whittakerschen Differentialgleichung[2]. *Eßlinger* ermittelt nach der Methode der kleinsten Quadrate die kritischen Kräfte der symmetrischen Kippung eines eingespannten Rahmens mit Rechteckquerschnitt (Abb. 2).

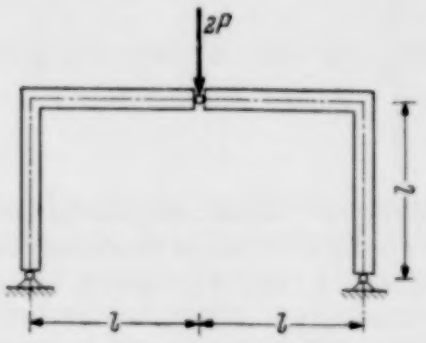



Abb. 1. Das in den Arbeiten von Chwalla und Schoblik untersuchte System mit Rechteckquerschnitt (siehe Fußnote 1 und 2 von Seite 394).

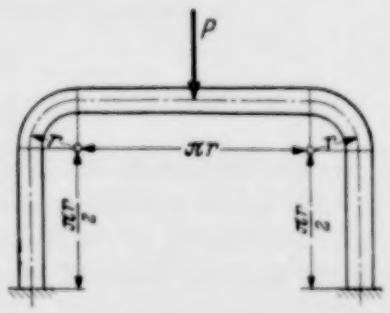



Abb. 2. Das in der Arbeit von Eßlinger untersuchte System mit Rechteckquerschnitt (siehe Fußnote 3 von Seite 394).

Das Kipp-Problem von Rahmen ist durch diese Abhandlungen jedoch noch nicht erschöpfend geklärt. In allen drei Untersuchungen[4] wird der Einfluß der Normalkraft in der Grundgleichung der Torsion

$$M_T = -D\,(1 - i_p^2\,N/D)\,\vartheta_x + W\,\vartheta_{x\,x\,x}$$

nicht berücksichtigt (für die Bezeichnungen sehe man Ziff. 2). Ferner steht die Behandlung des *I*-Querschnittes aus. Schließlich bedürfen die Berechnung des Horizontalschubes bei statisch unbestimmten Systemen und die Übergangsbedingungen an den Rahmenecken einiger ergänzender Betrachtungen.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die noch offenen Fragen zu klären. Zur Kippzahlberechnung der möglichen Lastfälle haben sich die Integralgleichungsmethoden als günstig erwiesen, weil sie für die numerische Rechnung mit Hilfe von elektronischen Rechenautomaten sehr bequem sind. Sind die Integrationskonstanten bestimmt, so kann die numerische Lösung den Programmierern überlassen werden.

Im folgenden werden die Integralgleichungen der Kippung infolge eines quadratisch verlaufenden Biegemomentes und einer konstanten Normalkraft für den geraden Träger mit doppelt-symmetrischem Querschnitt (*I*- und Rechteckquerschnitt) hergeleitet. Dann wird das geometrische Verhalten und das Kräftespiel der freien symmetrischen und antimetrischen Kippung symmetrisch ausgebildeter Rechteckrahmen betrachtet. Daraus werden die Randbedingungen und Übergangsbedingungen hergeleitet. Weiterhin wird untersucht, wie der Horizontalschub ermittelt werden muß. Ferner werden die zur Programmierung fertigen Formeln für zwei Lastfälle angegeben. Schließlich wird das Vorgehen bei der numerischen Berechnung erläutert.

---

[1] *E. Chwalla*, Stahlbau 11 (1938) S. 161.

[2] *E. Chwalla* und *F. Schoblik*, Proc. of the 5th Int. Congr. of Appl. Mech. 1938. S. 44.

[3] *M. Eßlinger*, Stahlbau 23 (1954) S. 53.

[4] Dsgl. in dem während der Drucklegung dieses Aufsatzes erschienenen Beitrag zur Kippung von Rahmenecken *K. Klöppel* und *W. Protte*, Stahlbau 30 (1961) S. 169.

**2. Vollständige Differentialgleichungen und zugehörige Integralgleichungen der Kippung.** Die beiden für doppelt-symmetrische Querschnitte geltenden, gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen[1] lauten

$$\frac{B}{l^2}\,u'' = -\,N\,u - M_0\,M(s)\,\vartheta - K_1\,s - K_2 \tag{1}$$

und

$$\frac{W}{l^4}\,\vartheta^{\mathrm{IV}} - \frac{D}{l^2}\left(1 - \frac{N\,i_p^2}{D}\right)\vartheta'' + \frac{M_0}{l^2}\,M(s)\,u'' = p\,\eta\,\vartheta\,. \tag{2}$$

In (1) und (2) bedeutet $W$ die auf den Schwerpunkt bezogene Wölbsteifigkeit, $B$ die Biegesteifigkeit für die Minimumträgheitsachse, $D$ die de St. Venantsche Drillsteifigkeit, $l$ die Stablänge und $i_p$ den polaren Trägheitshalbmesser. Es ist $N$ die über die Trägerlänge konstante Druckkraft, $M_0$ ein Vergleichsbiegemoment, $M(s)$ das dimensionslose Biegemoment als Funktion von $s$, $\eta = \varkappa\,h/2$ der Abstand der Streckenlast $p$ vom Schwerpunkt, $K_2$ und $(K_1 + K_2)$ die Biegemomente an den Trägerenden, deren Richtungspfeile mit der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes zusammenfallen. Ferner bedeutet $\lambda$ den dimensionslosen Eigenwert, $a$ und $\varrho$ dimensionslose Kenngrößen, $A$, $\widehat{B}$, $C_1$ bis $C_4$ Integrationskonstanten, $\vartheta$ den Drillwinkel und $u^*$ die auf die Stablänge bezogene dimensionslose seitliche Verschiebung $u$ des Schwerpunktes. Schließlich ist $z$ die Längenkoordinate und $s = z/l$. Striche sind Ableitungen nach $s$.

Wir setzen $u''$ aus (1) in (2) ein und erhalten mit der Methode von *Lagrange*[2] die beiden Integralgleichungen

$$u^*(s) = u(s)/l = \int_0^s (s-t)\,r_1(t)\,dt - \frac{l}{6\,B}\,[K_1\,s^3 + 3\,K_2\,s^2] + A\,s + \widehat{B} \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned}\vartheta(s) = {} & \frac{1}{a(1-\varrho)}\int_0^s \{\mathrm{Sinh}\,[a(s-t)] - a(s-t)\}\,r_2(t)\,dt + \frac{\lambda\,l}{\sqrt{B\,D}\,(1-\varrho)}\,\frac{K_1}{a^3}\Big\langle k\,[\mathrm{Sinh}\,(a\,s) - a\,s] \\ & + \frac{m}{a}\,\{2\,[\mathrm{Cosh}\,(a\,s) - 1] - (a\,s)^2\} + \frac{n}{a^2}\,\{6\,[\mathrm{Sinh}\,(a\,s) - a\,s] - (a\,s)^3\}\Big\rangle \\ & + \frac{\lambda\,l}{\sqrt{B\,D}\,(1-\varrho)}\,\frac{K_2}{a^2}\Big\langle k\,[\mathrm{Cosh}\,(a\,s) - 1] + \frac{m}{a}\,[\mathrm{Sinh}\,(a\,s) - a\,s] + \frac{n}{a^2}\,\{2\,[\mathrm{Cosh}\,(a\,s) - 1] - (a\,s)^2\}\Big\rangle \\ & - \frac{\lambda\,l}{\sqrt{B\,D}\,(1-\varrho)}\left[\frac{K_1}{60}\,(10\,k\,s^3 + 5\,m\,s^4 + 3\,n\,s^5) + \frac{K_2}{12}\,(6\,k\,s^2 + 2\,m\,s^3 + n\,s^4)\right] \\ & + C_1\,\mathrm{Cosh}\,(a\,s) + C_2\,\mathrm{Sinh}\,(a\,s) + C_3\,s + C_4\,,\end{aligned} \tag{4}$$

wobei

$$a = \sqrt{\frac{D\,l^2\,(1-\varrho)}{W}} = \frac{1}{\beta}\,\sqrt{1-\varrho}\,, \qquad \varrho = \frac{N\,i_p^2}{D}\,, \qquad \lambda = \frac{M_0\,l}{\sqrt{B\,D}}\,,$$

$$r_1(s) = -\,\lambda\,\sqrt{\frac{D}{B}}\,[M(s)\,\vartheta(s) + u^*(s)\,N\,l/M_0]\,,$$

$$r_2(s) = \lambda^2\,\{[M^2(s) + \varkappa\,\beta\,p\,\sqrt{B\,D}\,l/M_0^2]\,\vartheta(s) + M(s)\,u^*(s)\,N\,l/M_0\}$$

und

$$M(s) = k + m\,s + n\,s^2$$

ist.

Für den Stab mit Rechteckquerschnitt ist in (2) die Größe $W = 0$, und wir erhalten mit Hilfe des Grenzüberganges $a \to \infty$ aus (4) die folgende Integralgleichung für den Drillwinkel:

$$\begin{aligned}\vartheta(s) = {} & \frac{1}{1-\varrho}\int_0^s (t-s)\,r_2(t)\,dt - \frac{\lambda\,l}{\sqrt{B\,D}\,(1-\varrho)}\left[\frac{K_1}{60}\,(10\,k\,s^3 + 5\,m\,s^4 + 3\,n\,s^5)\right. \\ & \left. + \frac{K_2}{12}\,(6\,k\,s^2 + 2\,m\,s^3 + n\,s^4)\right] + C_1\,s + C_2\,.\end{aligned} \tag{5}$$

[1] Die Gl. (1) und (2) sind Sonderfälle der von *Chwalla* hergeleiteten allgemeinen Kippdifferentialgleichungen; vgl. *E. Chwalla*, *Federhofer-Girkmann*-Festschrift, Wien 1950, S. 125. Im Gegensatz zu *Chwalla* zählen wir den Drillwinkel $\vartheta$ im positiven Uhrzeigersinne.

[2] Bzgl. deren Erläuterung siehe etwa *L. Kraus*, Ing.-Arch. 26 (1958) S. 1.

Für die seitliche Verschiebung $u^*$ gilt (3). Bei Beachtung von

$$\left[\int_0^s y(s,t)\,dt\right]' = y(s,s) + \int_0^s \left[\frac{dy(s,t)}{ds}\right] dt$$

ist leicht zu erkennen, daß (3) und (4) bzw. (5) die Differentialgleichungen (1) und (2) erfüllen.

**3. Rand- und Übergangsbedingungen bei der Rahmenkippung.** Wir betrachten einen rechteckförmigen symmetrischen Rahmen aus ideal-elastischem Werkstoff. Seine beiden Stiele mögen entweder vollständig eingespannt oder in der Lastebene gelenkig gelagert und senkrecht dazu eingespannt sein. Die Querschnitte des Riegels und der Stiele seien $I$-Profile. Die äußere Belastung sei symmetrisch (Abb. 3). Sowohl im Riegel als auch in den Stielen mögen sich die Hauptträgheitsmomente wesentlich in ihrer Größe unterscheiden ($E J_1 \gg \bar{B}$ und $E J_2 \gg B$). Steigert

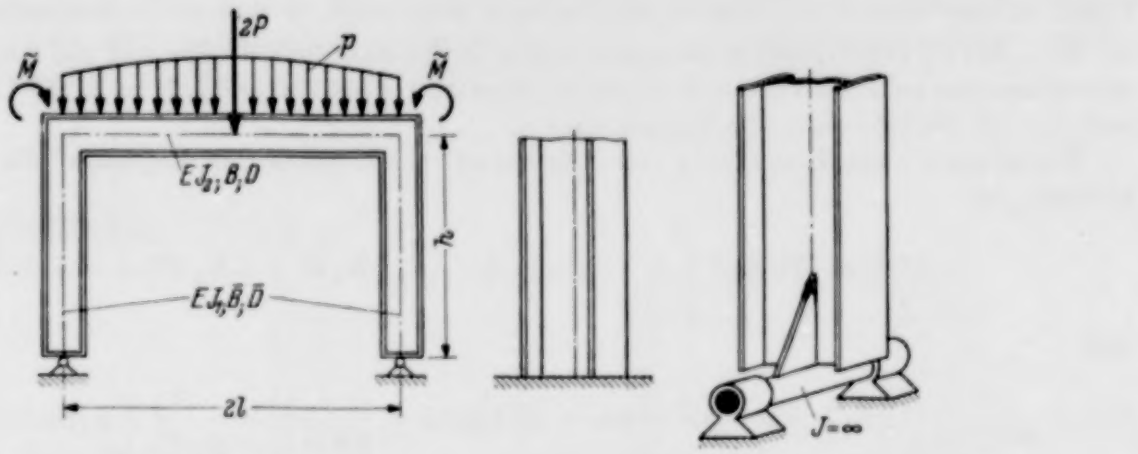



Abb. 3. System, Abmessungen, Belastung und Lagerungsarten. Es sind $EJ_1$ und $\bar{B}$ bzw. $EJ_2$ und $B$ die Biegesteifigkeiten bzg. der Maximum- und der Minimumträgheitsachse der Stiele bzw. des Riegels (symmetrische $I$-Querschnitte).

man die äußeren Lasten, so wird der Rahmen zuerst in der Lastebene verformt, um beim Erreichen der kritischen Laststufe seitlich auszukippen. Je nach den geometrischen Abmessungen werden sich antimetrische oder symmetrische Verformungsfiguren einstellen (Abb. 4). Die Randbedingungen an den Stielenden sind von der Verformungsart unabhängig. Die Lagerung der beiden

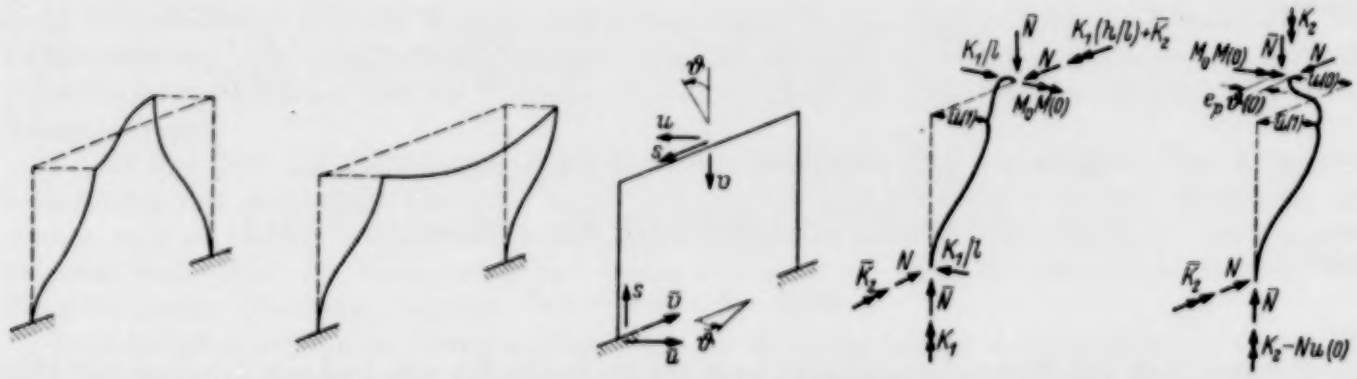



Abb. 4. Antimetrische und symmetrische Rahmenverformung (schematisch), Koordinatensysteme und Kräftespiel (bis zur Riegelmitte) eines antimetrisch bzw. symmetrisch ausgekippten, in Riegelmitte mit $2\bar{N}$ belasteten, rechteckförmigen Zweigelenkrahmens (die Kraft $2\bar{N}$ greift um $e_P$ oberhalb der Schwerachse an).

Rahmenstiele soll so beschaffen sein, daß die dort bei der Kippung auftretenden Torsionsmomente $M_T$ und die Biegemomente $\bar{K}_2$ aufgenommen werden können (Abb. 5a, b und c). Für den vollständig eingespannten Stiel sowie für die Ausbildung des Gelenkes gemäß Abb. 5a und Abb. 5b (die Torsionssteifigkeit der Stirnplatte wird als unendlich groß angenommen) gilt

$$\bar{\vartheta}'(0) = 0\,. \tag{6}$$

Dagegen haben wir bei der Ausbildung des Gelenkes nach Abb. 5c

$$\bar{\vartheta}''(0) = 0\,. \tag{7}$$

Weiterhin ist bei jeder der beschriebenen Lagerungsarten

$$\bar{u}(0) = 0\,, \tag{8}$$

$$\bar{u}'(0) = 0 \tag{9}$$

und

$$\bar{\vartheta}(0) = 0\,. \tag{10}$$

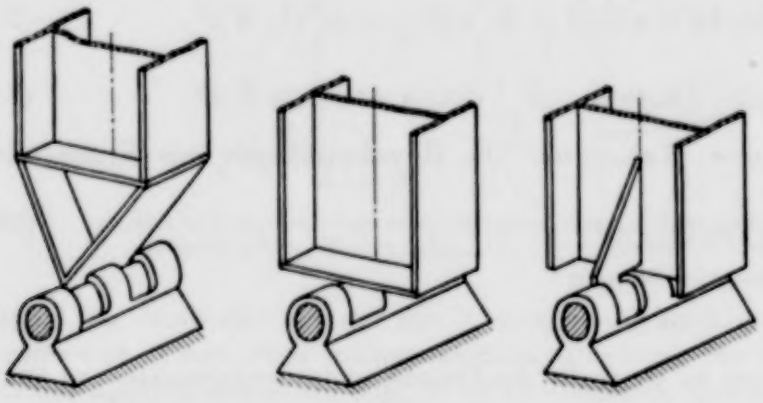



Abb. 5. Konstruktiv mögliche Ausbildungen des Gelenkes.

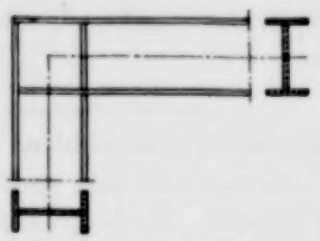


Abb. 6. Konstruktive Ausbildung der Rahmenecke.

Setzen wir voraus, daß die Rahmenecken nach Abb. 6 konstruiert sind, so läßt sich in guter Näherung Wölbverhinderung annehmen, d. h.

$$\vartheta'(1) = 0 \tag{11}$$

und

$$\bar{\vartheta}'(1) = 0 \tag{12}$$

setzen[1]. Da die Rahmenecken voraussetzungsgemäß nicht seitlich festgehalten werden, ergeben sich die Kontinuitätsbedingungen

$$\vartheta(1) + \bar{u}'(1)/h = 0\,, \tag{13}$$

$$\bar{\vartheta}(1) + u'(1)/l = 0 \tag{14}$$

und

$$u(1) + \bar{u}(1) = 0\,. \tag{15}$$

Die restlichen Übergangsbedingungen an der Rahmenecke und die Randbedingungen für die Riegelmitte werden nun für antimetrische und symmetrische Kippverformungen getrennt hergeleitet.

a) Antimetrische Verformung des Rahmens. Die Riegelmitte wird sich wohl infolge der Biegebelastung in der Lastebene senkrecht nach unten verschieben, jedoch weder verdrehen noch seitlich ausweichen. Weiterhin verschwindet dort die Krümmung der Funktion u. Schließlich wird der Querschnitt an dieser Stelle keine Wölbspannungen aufweisen. Es ist also

$$\vartheta(0) = 0\,, \tag{16}$$

$$\vartheta''(0) = 0\,, \tag{17}$$

$$u(0) = 0\,, \tag{18}$$

$$u''(0) = 0\,. \tag{19}$$

Aus (1) folgt mit (16) und (18) stets

$$K_2 = 0\,. \tag{20}$$

Aus Gründen des Gleichgewichts müssen die seitlichen Querkräfte gleich groß sein, das heißt

$$\bar{K}_1 = K_1\, h/l\,. \tag{21}$$

[1] *Chwalla* (s. Fußnote 1 und 2 von Seite 394) schreibt $\vartheta''(1) = \bar{\vartheta}''(1) = 0$ vor; d. h. die Querschnittsebenen der Rahmenecke können sich frei verwölben.

Die beiden restlichen Übergangsbedingungen an der Rahmenecke liefert die Grundgleichung des Torsionsmomentes[1]

$$M_T = M_{T_0} - M_0\, M(1)\, u'(1)/l + (K_1 + K_2)\, v'(1)/l = \vartheta'''(1)\, W/I^3 - \vartheta'(1)\,(1-\varrho)\, D/l\,. \quad (22)$$

In (22) bedeutet $M_{T_0}$ das durch die äußeren Lasten und die Reaktionen bedingte Torsionsmoment und $v$ die Verschiebung des Querschnittsschwerpunktes in der Rahmenebene senkrecht zur Stabachse (Abb. 4). Schreiben wir (22) für das Riegel- und das obere Stielende an und gehen wir zur Bestimmung von $M_{T_0}$ vom Gelenkpunkt aus vor, so ergeben sich bei Berücksichtigung von (11), (12), (20) und (21) die beiden noch fehlenden Bedingungen zu

$$K_1(h/l) + \bar{K}_2 - \bar{N}\, u(1) - M_0\, M(1)\, u'(1)/l + K_1\, v'(1)/l = \vartheta'''(1)\, W/I^3 \quad (23)$$

und

$$K_1 - N\,\bar{u}(1) - \bar{M}_0\, \bar{M}(1)\, \bar{u}'(1)/h + \left[K_1(h/l) + \bar{K}_2\right] \bar{v}'(1)/h = \bar{\vartheta}'''(1)\, \bar{W}/h^3\,. \quad (24)$$

b) Symmetrische Verformung des Rahmens. In Riegelmitte gilt aus Symmetriegründen

$$u'(0) = 0 \quad (25)$$

und wegen des Verschwindens der Flanschverwölbungen

$$\vartheta'(0) = 0\,. \quad (26)$$

Wirkt dort eine Last $2P$ in der Entfernung $e_P$ oberhalb des Querschnittsschwerpunktes, so muß

$$\vartheta'''(0)\, W/I^3 = \vartheta(0)\, P\, e_P \quad (27)$$

sein [vgl. (22)]. Bei der Beanspruchung des Riegels durch eine Streckenlast haben wir statt (27)

$$\vartheta'''(0) = 0\,. \quad (28)$$

Aus Symmetriegründen verschwinden die Querkräfte $K_1/l$ und $\bar{K}_1/h$, das heißt

$$K_1 = 0 \quad (29)$$

und

$$\bar{K}_1 = 0\,. \quad (30)$$

Das Stieleinspannmoment $\bar{K}_2$ ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung (Verschwinden der Momente bezüglich der durch die beiden Gelenke gelegten Achse) zu

$$\bar{K}_2 = P\,[u(0) + e_P\, \vartheta(0)] + l \int_0^1 p\,[u(t) + \eta\, \vartheta(t)]\, dt\,. \quad (31)$$

Mit Hilfe von (30) schreiben wir (22) für das obere Stielende an

$$K_2 - N\,[u(0) - u(1)] - \bar{M}_0\, \bar{M}(1)\, \bar{u}'(1)/h + \bar{K}_2\, \bar{v}'(1)/h = \bar{\vartheta}'''(1)\, \bar{W}/h^3 \quad (32)$$

und haben damit alle Bedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten gewonnen.

c) Sonderfall: Rechteckquerschnitt. Es ist $W = 0$ bzw. $a = \infty$, und es gelten (3) und (5). Es sind zwölf Konstanten aus Rand- und Übergangsbedingungen zu ermitteln. Diese Bedingungen sind für den $I$-Querschnitt in den Abschnitten a) und b) angegeben und können zum Teil unverändert übernommen werden. Es entfallen alle Aussagen über die Verwölbung und die sekundären Normalspannungen [(6), (7), (11), (12), (17) und (26)]. Statt (22) gilt nun

$$M_T = -\vartheta'(1)\,(1-\varrho)\, D/l\,, \quad (22\,\mathrm{a})$$

und deswegen sind (23), (24), (27) und (32) abzuändern in

$$K_1(h/l) + \bar{K}_2 - \bar{N}\, u(1) - M_0\, M(1)\, u'(1)/l + K_1\, v'(1)/l + \vartheta'(1)\,(1-\varrho)\, D/l = 0\,, \quad (23\,\mathrm{a})$$

$$K_1 - N\,\bar{u}(1) - \bar{M}_0\, \bar{M}(1)\, \bar{u}'(1)/h + \left[K_1(h/l) + \bar{K}_2\right] \bar{v}'(1)/h + \bar{\vartheta}'(1)\,(1-\bar{\varrho})\, \bar{D}/h = 0\,, \quad (24\,\mathrm{a})$$

$$\vartheta(0)\, P\, e_P + \vartheta'(0)\,(1-\varrho)\, D/l = 0 \quad (27\,\mathrm{a})$$

und

$$K_2 - N\,[u(0) - u(1)] - \bar{M}_0\, \bar{M}(1)\, \bar{u}'(1)/h + \bar{K}_2\, \bar{v}'(1)/h + \bar{\vartheta}'(1)\,(1-\bar{\varrho})\, \bar{D}/l = 0\,. \quad (32\,\mathrm{a})$$

Schließlich gilt statt (28)

$$\vartheta'(0) = 0\,. \quad (28\,\mathrm{a})$$

[1] Siehe etwa die Fußnote 1 auf S. 21 der im Forschh. a. d. G. des Stahlbaues Nr. 6. Berlin 1943 veröffentlichten Arbeit von *E. Chwalla*, sowie Gl. (B 12) auf S. 32 des als Bull. Nr. 10 from The Div. of Buildings Statics and Struct. Eng. at The Royal Inst. of Techn., Stockholm erschienenen Buches von *O. Pettersson*.

**4. Ermittlung des Horizontalschubes.** Für die Verschiebung $v$ (Abb. 4) gilt[1]

$$B_{max}\, v_{zzzz} + N\, v_{zz} = p(z)\,. \tag{33}$$

Das Gleichungspaar (1) und (2) bildet zusammen mit (33) die Grundgleichungen der räumlichen Stabilität von Stäben mit doppelt-symmetrischen Querschnitten. Da voraussetzungsgemäß $B_{max} \geqslant B$ ist, tritt ein Stabilitätsversagen des Rahmens in seiner Ebene nicht ein. Dennoch ist (33) bei statisch unbestimmten Systemen bedeutsam. Denn aus dieser Grundgleichung errechnen sich der statisch unbestimmte Horizontalschub $H$ und die Stieleinspannmomente. Da in (33) der

Abb. 7. System und Verlauf des Horizontalschubes; ----- qualitativer Verlauf nach der Theorie erster Ordnung $[H_0 = M/h\,(1 + J_2\,h/3\,J_1\,l)]$; ——— qualitativer Verlauf nach der Theorie zweiter Ordnung.

Einfluß der Normalkräfte auf die Biegung berücksichtigt wird, ergeben sich die statisch Unbestimmten stets aus einer transzendenten Gleichung für den Horizontalschub $H$. Tragen wir $H$ über der äußeren Belastung auf, so ist zu erkennen, daß die gegenseitige Abhängigkeit nicht mehr linear ist. So wird etwa der Horizontalschub $H$ eines Zweigelenkrahmens, der an den Rahmenecken mit den gegengleichen Momenten $M$ belastet ist, für größere $M$ kleiner bzw. größer als der nach der Theorie erster Ordnung berechnete Wert, wenn $H$ im Riegel als Zug- bzw. als Drucknormalkraft wirkt (Abb. 7). Bei Verwendung des Horizontalschubes der Theorie erster Ordnung

$$H_0 = \frac{M}{h}\Big/\left(1 + \frac{J_2\,h}{3\,J_1\,l}\right) \tag{34}$$

erhalten wir also falsche Kippzahlen. Um dem zu entgehen, empfiehlt es sich, den Horizontalschub durch eine Potenzreihe

$$H = a_1\,M + a_2\,M^2 + a_3\,M^3 + a_4\,M^4 \tag{35}$$

anzunähern und mit (35) in die Stabilitätsberechnung einzugehen. Die Koeffizienten $a_1$, $a_2$, $a_3$ und $a_4$ in (35) sind von den Trägheitsmomenten und den Längen der Stiele und des Riegels abhängig und werden aus der aus (33) resultierenden transzendenten Gleichung gewonnen.

**5. Lastfall: Rahmeneckmomente.** Wir untersuchen einen Rahmen mit Rechteckquerschnitt, der an den Ecken durch zwei gegengleiche äußere Momente $M$ belastet, in der Lastebene gelenkig

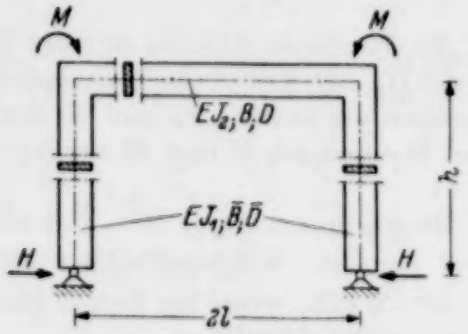



Abb. 8. Systemskizze des Rahmens mit Rechteckquerschnitt und Eckmomenten $M$.

gelagert und senkrecht dazu an den Stielenden eingespannt ist (Abb. 8). Die transzendente Gleichung zur Bestimmung des Horizontalschubes $H$ lautet

$$y = \left[\left(\frac{\mu}{3\,x^2}\right)\varepsilon\,\operatorname{ctg}(\varepsilon) + \frac{1}{x}\right], \tag{36a}$$

beziehungsweise

$$y = \left[\left(\frac{\mu}{3\,x^2}\right)\varepsilon\,\operatorname{Ctgh}(\varepsilon) + \frac{1}{x}\right], \tag{36b}$$

[1] Siehe die in Fußnote 1 von S. 395 genannte Arbeit von *E. Chwalla*.

wenn $H$ im Riegel als Druck- bzw. als Zugnormalkraft wirkt. In (36a) und (36b) bedeutet $y = M/Hl$, $\mu = J_2/J_1$, $x = l/h$ und $\varepsilon^2 = H l^2/E J_2$. Für $x = 1$ und verschiedene $\mu$-Werte sind die $(y, \varepsilon)$-Kurven nach (36a) und (36b) in Abb. 9a und b eingezeichnet. Für $\varepsilon = \pi/2$ ist $y = 1/x$ (Abb. 9a) und unabhängig von $\mu$. An diesem Punkt ist die Normalkraft im Riegel gleich der Eulerlast $P_E = \pi^2 E I_2/(2l)^2$, die Verformungen werden unendlich groß, das Tragvermögen des Rahmens in seiner Ebene ist erschöpft. Für $\varepsilon = 0$ gehen (36a) und (36b) in den Wert $y_0 = [(\mu/3x^2) + 1/x]$

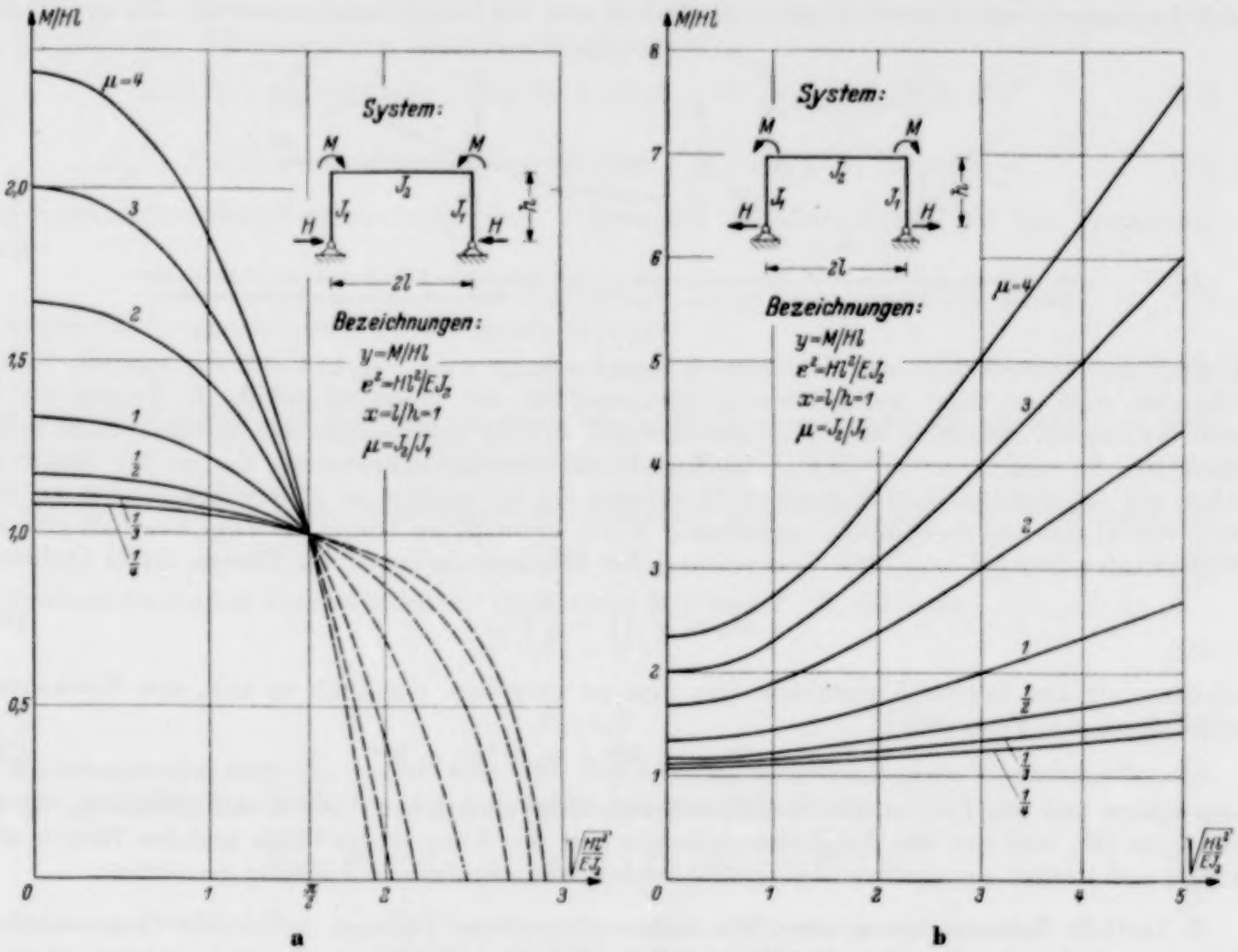



Abb. 9a und b. $(y, \varepsilon)$-Kurven nach (36a) und (36b) für $x = 1$.

der Theorie erster Ordnung über. Es ist also in Abb. 9a nur der Bereich $0 \leqq \varepsilon < \pi/2$ interessant. Aus Abb. 9a und 9b erhalten wir die $(H, M)$-Kurven bei konstanten $J_1$, $J_2$, $h$ und $l$ durch einfache Umrechnung (Abb. 7). Dafür benötigen wir in Abb. 9a und 9b den Bereich kleiner Werte $\varepsilon$. Denn die den größeren $\varepsilon$ entsprechenden Wertepaare $H$ und $M$ erzeugen im Rahmen Spannungen, die oberhalb der Fließgrenze liegen.

Da im Riegel ein konstantes Biegemoment $M_0 = M - H h$ wirkt, lassen sich für ihn die Lösungen von (1) und (2) geschlossen angeben. Wir beschränken uns dabei auf diejenigen Fälle von $M$, bei denen stets $0 < \varrho < 1$ bzw. $\tilde{k}^2 > 0$ gilt, wenn im Riegel eine Druck- bzw. eine Zugnormalkraft wirkt. Mit $N = H$ (positiv, wenn Druckkraft),

$$M_0 = M - H h\,, \qquad M(s) = 1\,, \qquad W = 0\,, \qquad \eta = 0\,, \qquad \lambda = M_0 l/\sqrt{B D}$$

und

$$\tilde{k}^2 = [(H l^2/B) + \lambda^2/(1 - \varrho)]$$

lauten die Lösungen von (1) und (2) für den Riegel

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda \sqrt{B/D}}{1 - \varrho} \left\{A_1 \cos \tilde{k}\, s + A_2 \sin \tilde{k}\, s + \left[1 - (1 - \varrho)\left(\tilde{k}/\lambda\right)^2\right](A_3\, s + A_4)\right\} - \frac{l}{\lambda \sqrt{B D}} (K_1 s + K_2) \quad (37)$$

und

$$u^*(s) = A_1 \cos \tilde{k}\, s + A_2 \sin \tilde{k}\, s + A_3\, s + A_4\,. \quad (38)$$

Mit $\bar{\eta} = 0$, $\overline{M}_0 = H\,h$, $\bar{\lambda} = H\,h^2/\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}$, $\bar{m} = -1$ und $\bar{k} = \bar{n} = \overline{N} = \bar{\varrho} = 0$ ergeben sich aus (3) und (5) die Integralgleichungen und deren erste Ableitungen für $\bar{\vartheta}$ und $\bar{u}^*$ des Stieles zu

$$\bar{\vartheta}(s) = \bar{\lambda}^2 \int_0^s (t-s)\,\overline{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt + \frac{\bar{\lambda}\,h}{12\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}\left(\overline{K}_1\,s^4 + 2\,\overline{K}_2\,s^3\right) + C_1\,s + C_2\,, \tag{39}$$

$$\bar{\vartheta}'(s) = -\bar{\lambda}^2 \int_0^s \overline{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt + \frac{\bar{\lambda}\,h}{\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}\left(\overline{K}_1\frac{s^3}{3} + \overline{K}_2\frac{s^2}{2}\right) + C_1\,, \tag{40}$$

$$\bar{u}^*(s) = \bar{\lambda}\sqrt{\overline{D}/\overline{B}} \int_0^s (t-s)\,\overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt - \frac{h}{6\,\overline{B}}\left(\overline{K}_1\,s^3 + 3\,\overline{K}_2\,s^2\right) + \overline{A}\,s + \widetilde{B} \tag{41}$$

und

$$\bar{u}^*(s)' = -\bar{\lambda}\sqrt{\overline{D}/\overline{B}} \int_0^s \overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt - \frac{h}{\overline{B}}\left(\overline{K}_1\frac{s^2}{2} + \overline{K}_2\,s\right) + \overline{A}\,. \tag{42}$$

**a) Antimetrische Kippform.** Aus (16), (18), (19), (37) und (38) erhalten wir

$$A_1 = A_4 = K_2 = 0\,. \tag{43}$$

Ferner ergeben (8), (9), (10), (21) und (39) bis (42)

$$\overline{A} = \widetilde{B} = C_2 = 0 \tag{44}$$

und

$$\overline{K}_1 = K_1\,h/l\,. \tag{21a}$$

Mit Hilfe von (37) bis (42) folgt aus (14), (15), (13), (23a) und (24a) bei Berücksichtigung von (43), (44) und (21a) das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der restlichen fünf Konstanten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\bar{\lambda}\,h^2}{12\,l\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}\,K_1 + \frac{\bar{\lambda}\,h}{6\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}\,\overline{K}_2 + \tilde{k}\cos\tilde{k}\,A_2 + A_3 + C_1 = \bar{\lambda}^2\int_0^1 (1-t)\,\overline{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\,,\\
&-\frac{h^3}{6\,l^2\,\overline{B}}\,K_1 - \frac{h^2}{6\,l\,\overline{B}}\,\overline{K}_2 + \sin\tilde{k}\,A_2 + A_3 = \bar{\lambda}\sqrt{\overline{D}/\overline{B}}\,(h/l)\int_0^1 (1-t)\,\overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\,,\\
&\left[-\frac{l}{\lambda\sqrt{B\,D}} - \frac{h^2}{2\,l\,\overline{B}}\right]K_1 - \frac{h}{\overline{B}}\,\overline{K}_2 + \frac{\lambda\sqrt{B/D}}{1-\varrho}\sin\tilde{k}\,A_2 + \frac{\lambda\sqrt{B/D}}{1-\varrho}\left[1-(1-\varrho)\left(\frac{\tilde{k}}{\lambda}\right)^2\right]A_3 =\\
&\qquad = \bar{\lambda}\sqrt{\overline{D}/\overline{B}}\int_0^1 \overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\,,\\
&\left[(h/l) - \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{D}{B}}\,(1-\varrho) - \frac{\bar{\lambda}}{3}\frac{\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}{E\,J_1}\right]K_1 + \overline{K}_2 - \frac{\lambda\sqrt{B\,D}}{l}\,(1-\varrho)\left(\frac{\tilde{k}}{\lambda}\right)^2 A_3 = 0\,,\\
&\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)\frac{\bar{\lambda}\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}{3\,E\,J_1}\right]K_1 + \frac{\bar{\lambda}\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}{3\,E\,J_1}\,\overline{K}_2 + \frac{\overline{D}}{h}\,C_1\\
&\qquad = \frac{\overline{D}\,\bar{\lambda}^2}{h}\left[\int_0^1 \overline{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt + \int_0^1 t\,\overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\right].
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Weil die Normalkraft fehlt, ist die Integralgleichung (39) von (41) unabhängig und reicht mit den aus (45) zu ermittelnden Konstanten $K_1$, $\overline{K}_2$ und $C_1$ allein zur Berechnung der Eigenwerte $\lambda$ und $\bar{\lambda}$ aus. Um (39) in der für die numerische Rechnung bequemen Form

$$\frac{\bar{\vartheta}(s)}{\bar{\lambda}^2} = \int_0^s (t-s)\,\overline{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt + X_1\,s^4 + X_2\,s^3 + X_3\,s \tag{46}$$

schreiben zu können, müssen die Größen

$$X_1 = \frac{K_1\,h^2}{12\,\bar{\lambda}\,l\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}}\,, \qquad X_2 = \frac{\overline{K}_2\,h}{6\,\bar{\lambda}\sqrt{\overline{B}\,\overline{D}}} \qquad \text{und} \qquad X_3 = \frac{C_1}{\bar{\lambda}^2}\,, \tag{47}$$

anstatt $K_1$, $\bar{K}_2$ und $C_1$ als Unbekannte in (45) eingeführt werden. Bei Erweiterung der beiden letzten Zeilen mit $h^2/12\,\bar{\lambda}\,l\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}$ ergibt sich somit aus (45) in Matrizenschreibweise

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\,, \tag{45a}$$

wobei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} [\bar{\lambda}^2] & [\tilde{k}\cos\tilde{k}] & [1] & [\bar{\lambda}^2] & [\bar{\lambda}^2] \\ [0] & [\sin\tilde{k}] & [1] & [-2\,\bar{\lambda}(h/l)\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}] & [-3\,\bar{\lambda}(h/l)\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}] \\ [0] & \left[\frac{\lambda\sqrt{B/D}}{1-\varrho}\sin\tilde{k}\right] & \left[\frac{\lambda\sqrt{B/D}}{1-\varrho}\left\{1-(1-\varrho)\left(\frac{\tilde{k}}{\lambda}\right)^2\right\}\right] & \left[-12\,(l/h)^2\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{B}\,\bar{D}}{B\,D}}-6\,\bar{\lambda}\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}\right] & [-6\,\bar{\lambda}\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}] \\ [0] & [0] & \left[-(h/l)^2\frac{\lambda}{12\,\bar{\lambda}}\sqrt{\frac{\bar{B}\,\bar{D}}{B\,D}}(1-\varrho)\left(\frac{\tilde{k}}{\lambda}\right)^2\right] & \left[(h/l)-\frac{1}{\lambda}\sqrt{D/B}\,(1-\varrho)-\frac{\bar{\lambda}\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}}{3\,E\,J_1}\right] & [h/2\,l] \\ \left[\bar{\lambda}\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}\,(h/12\,l)\right] & [0] & [0] & \left[1+(h/l)\,\bar{\lambda}\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}/3\,E\,J_1\right] & \left[(h/2\,l)\,\bar{\lambda}\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}/3\,E\,J_1\right] \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} X_3 \\ A_2 \\ A_3 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}^2\int_0^1 (1-t)\,\bar{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt \\ \bar{\lambda}\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}\,(h/l)\int_0^1 (1-t)\,\bar{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt \\ \bar{\lambda}\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}\int_0^1 \bar{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt \\ 0 \\ \bar{\lambda}\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}\,(h/12\,l)\left[\int_0^1 \bar{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt+\int_0^1 t\,\bar{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\right] \end{pmatrix}$$

und $\bar{v}'(1)/h = -v'(1)/l = H\,h^2/3\,E\,J_1$ ist.

**b) Symmetrische Kippform.** Aus (25), (28a), (37) und (38) bzw. (8), (9), (10), (37) bis (42) ergibt sich

$$A_2 = A_3 = 0 \tag{48}$$

bzw.

$$\bar{A} = \bar{B} = C_2 = 0\,. \tag{49}$$

Mit Hilfe von (29) bis (31) und (37) bis (42) liefern die Übergangsbedingungen (32a), (13), (15) und (14) das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der restlichen vier Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\bar{D}}{h}\,C_1 + K_2 + \frac{\bar{\lambda}\,l\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}}{h^2}\,(\cos\tilde{k}-1)\,A_1 = (\bar{D}\bar{\lambda}^2/h)\left[\int_0^1 \bar{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt+\int_0^1 \bar{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\right], \\ &-\frac{l}{\lambda\sqrt{B\,D}}\,K_2 + \frac{\lambda\sqrt{D/B}}{1-\varrho}\cos\tilde{k}\,A_1 + \frac{\lambda\sqrt{D/B}}{1-\varrho}\left[1-(1-\varrho)\left(\frac{\tilde{k}}{\lambda}\right)^2\right]A_4 = \bar{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{D}}{B}}\int_0^1 \bar{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\,, \\ &\cos\tilde{k}\,A_1 + A_4 = \bar{\lambda}\,(h/l)\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\int_0^1 (1-t)\,\bar{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\,, \\ &C_1 - \tilde{k}\sin\tilde{k}\,A_1 = \bar{\lambda}^2\int_0^1 (1-t)\,\bar{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\,. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Nun erweitern wir die erste Zeile von (50) mit $h/\bar{D}$ und führen statt $C_1$ und $K_2$ die beiden dimensionslosen Unbekannten

$$X_1 = \frac{C_1}{\bar{\lambda}^2} \qquad \text{und} \qquad X_2 = \frac{K_2\, l}{\lambda \sqrt{B\,D}} \tag{51}$$

ein. Entsprechend (46) läßt sich nun die zur Berechnung von $\lambda$ und $\bar{\lambda}$ allein nötige Integralgleichung für $\bar{\vartheta}$ wie folgt schreiben:

$$\bar{\vartheta}(s)/\bar{\lambda}^2 = \int_0^s (t-s)\, \overline{M}^2(t)\, \bar{\vartheta}(t)\, dt + X_1\, s\,, \tag{52}$$

und das Gleichungssystem (50) lautet in Matrizenform

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\,. \tag{50a}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{S} = \begin{Bmatrix} [\bar{\lambda}^2] & \left[\left(\frac{h}{l}\right)\frac{\lambda\sqrt{B\,D}}{\bar{D}}\right] & \left[\frac{l}{h}\,\bar{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{B}}{\bar{D}}}\,(\cos\tilde{k}-1)\right] & [0] \\ [0] & [-1] & \left[\frac{\lambda\sqrt{D/B}}{1-\varrho}\cos\tilde{k}\right] & \left[\frac{\lambda\sqrt{D/B}}{1-\varrho}\left\{1-(1-\varrho)\left(\frac{\tilde{k}}{\lambda}\right)^2\right\}\right] \\ [0] & [0] & [\cos\tilde{k}] & [1] \\ [\bar{\lambda}^2] & [0] & [-\tilde{k}\sin\tilde{k}] & [0] \end{Bmatrix},$$

$$\mathfrak{q} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ A_1 \\ A_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{r} = \begin{Bmatrix} \bar{\lambda}^2\left[\int_0^1 \overline{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt + \int_0^1 \overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt\right] \\ \bar{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\int_0^1 \overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt \\ \bar{\lambda}(h/l)\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\int_0^1 (1-t)\,\overline{M}(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt \\ \bar{\lambda}^2\int_0^1 (1-t)\,\overline{M}^2(t)\,\bar{\vartheta}(t)\,dt \end{Bmatrix}.$$

**6. Lastfall: Einzellast in Riegelmitte.** Wir untersuchen denselben Rahmen wie in Abschn. 5. Statt der Rahmeneckmomente $M$ sei er jedoch mit einer an der Riegelschwerachse angreifenden, lotrechten Last $2\,P$ beansprucht (Abb. 10). Den Horizontalschub ermitteln wir aus der transzendenten Gleichung

$$\frac{(1/y) - \sqrt{y/\mu}\,\varepsilon\,\sin\left(\sqrt{y/\mu}\,x\,\varepsilon\right)}{\cos\left(\sqrt{y/\mu}\,x\,\varepsilon\right)} - (1/y) + y\,[\varepsilon\,\mathrm{ctg}(\varepsilon) - 1] = 0 \tag{53a}$$

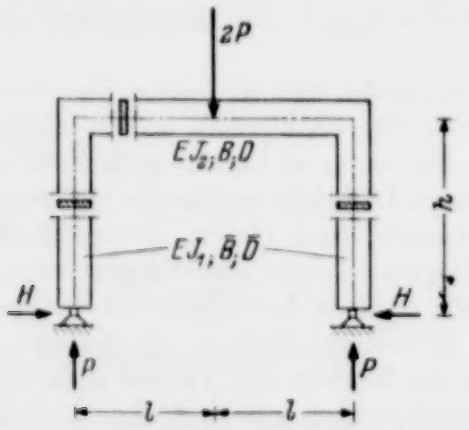



Abb. 10. Systemskizze des Rahmens mit Rechteckquerschnitt und Einzellast $2\,P$.

bzw.

$$\frac{(1/y) + \sqrt{y/\mu}\,\varepsilon\,\mathrm{Sinh}\,\sqrt{(y/\mu}\,x\,\varepsilon)}{\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{y/\mu}\,x\,\varepsilon\right)} - (1/y) + y\,[\varepsilon\,\mathrm{Ctgh}(\varepsilon) - 1] = 0\,, \tag{53b}$$

wenn $P$ im Rahmen Druck- bzw. Zugnormalkräfte hervorruft. In (53 a) und (53 b) ist $y = H/P$, $\mu = J_2/J_1$, $x = l/h$ und $\varepsilon^2 = P\,h^2/E\,J_1$.

Abb. 11a gibt für $x = 1$ und verschiedene $\mu$ den Verlauf der $(y, \varepsilon)$-Linien nach (53a) wieder Auch hier dürfen die Drucknormalkräfte in den Stielen und im Riegel die Werte der Eulerkräfte nicht erreichen $[(P h^2/E J_1) < \pi^2$ und $(H l^2/E J_2) < (\pi/2)^2]$. Das heißt, daß für die $y$-Werte stets $y < 2 x/\pi$ und $\varepsilon < \pi$ gilt. Die Kurven $\mu =$ konst. beginnen auf der Ordinate mit dem Wert $1{,}5\, x/(3 + \mu/x)$ und haben dort eine waagerechte Tangente. Diese Kurven verlaufen

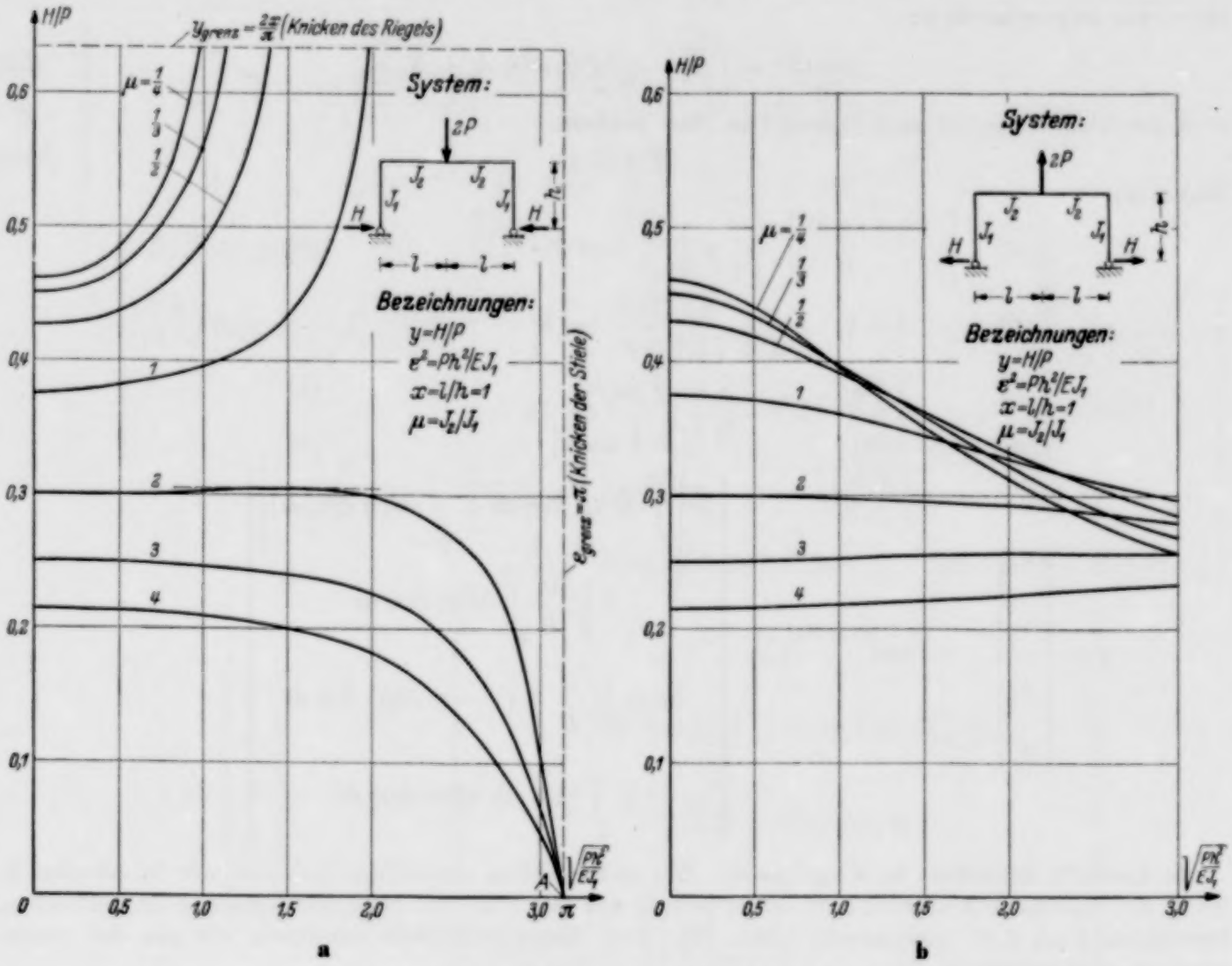



Abb. 11a und b. $(y, \varepsilon)$-Kurven nach (53a) und (53b) für $x = 1$.

a) für kleine Werte $\mu$ monoton steigend, um die Gerade $y = 2\, x/\pi$ bei $\varepsilon = \sqrt{(\pi/2\, x)^3\, \mu}$ zu erreichen; sie verlaufen

b) für große Werte $\mu$ monoton fallend und schneiden die Abszisse im Punkt $A(\pi; 0)$.

Die Kurven c) mit mittleren $\mu$-Werten steigen zuerst mäßig, erreichen ein Maximum und münden dann in den Punkt $A$. Die unter a) und c) genannten Kurven zeigen in ihrem Verlauf, daß der sich aus der Theorie zweiter Ordnung ergebende Horizontalschub $H_{II}$ größer als der nach der Theorie erster Ordnung berechnete Wert $H_I$ ist. Bezüglich der Horizontalschübe wirken also die zugehörigen Rahmen[1] wie Bögen. Genau das Entgegengesetzte (nämlich $H_I > H_{II}$) ist bei den Rahmen der Fall, zu denen die unter b) beschriebenen Kurven gehören. Hier ist also ein Vergleich mit den entsprechenden Horizontalschüben des Kabels von Hängebrücken angebracht. Für kleine Werte $x$ streben auch die Kurven mit kleinen $\mu$ zu dem Punkt $A$. Das bedeutet, daß selbst bei kleinen Riegelträgheitsmomenten solche Rahmen in ihrer Ebene durch Knicken der langen Stiele versagen.

Abb. 11b zeigt den Verlauf der $(y, \varepsilon)$-Linien für $x = 1$ und verschiedene $\mu$ nach (53b). Die Kurven mit kleinen $\mu$ fallen monoton. Es ist $H_{II} < H_I$, und es gilt die Hängebrücken-Analogie[2]. Jedoch für größere $\mu$ steigen die Kurven ($H_{II} > H_I$; die Rahmen verhalten sich wie Bögen).

[1] Ebenso die Rahmen der Abb. 9a.
[2] Desgl. auch bei den Rahmen der Abb. 9b.

Zur Umrechnung in $(H, P)$-Kurven benötigen wir auch in Abb. 11a und b nur den Bereich kleiner Werte $\varepsilon$. Für größere $\varepsilon$ ist nämlich das Tragvermögen des Rahmens praktisch durch Erreichen der Fließgrenze erschöpft.

Mit den Größen $\lambda = P l^2/\sqrt{B D}$, $\bar{\lambda} = H h^2/\sqrt{\bar{B}\bar{D}}$, $\varrho = i_p^2 H/D$, $\bar{\varrho} \overset{!}{=} \bar{i}^2 P/\bar{D}$, $k = 1 - H h/P l$, $m = \bar{m} = -1$, $n = \bar{k} = \bar{n} = 0$, $N = H$, $\bar{N} = P$, $M_0 = P l$, $\bar{M}_0 = H h$, mit den Konstanten $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C}_2 = 0$ und $\bar{K}_1 = K_1 h/l$ [siehe (8), (9), (10) und (21)] und schließlich mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} r_1(s) &= -\lambda \sqrt{D/B}\,[M(s)\,\vartheta(s) + u^*(s)\,H/P]\,, \\ r_2(s) &= \lambda^2\,[M^2(s)\,\vartheta(s) + M(s)\,u^*(s)\,H/P]\,, \\ \bar{r}_1(s) &= -\bar{\lambda}\sqrt{\bar{D}/\bar{B}}\,[\bar{M}(s)\,\bar{\vartheta}(s) + \bar{u}^*(s)\,P/H]\,, \\ \bar{r}_2(s) &= \bar{\lambda}^2\,[\bar{M}^2(s)\,\bar{\vartheta}(s) + \bar{M}(s)\,\bar{u}^*(s)\,P/H] \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

schreiben sich die Integralgleichungen (3) und (5) für $u^*$, $\vartheta$, $\bar{u}^*$, und $\bar{\vartheta}$ und ihre ersten Ableitungen wie folgt:

$$u^*(s) = \int_0^s (s-t)\,r_1(t)\,dt - \frac{l}{6\,B}\,(K_1 s^3 + 3\,K_2 s^2) + A\,s + \hat{B}\,, \tag{55}$$

$$u^*(s)' = \int_0^s r_1(t)\,dt - \frac{l}{2\,B}\,(K_1 s^2 + 2\,K_2 s) + A\,, \tag{56}$$

$$\vartheta(s) = \frac{1}{1-\varrho}\int_0^s (t-s)\,r_2(t)\,dt - \frac{\lambda l}{\sqrt{B D}\,(1-\varrho)}\left[\frac{K_1}{12}(2k s^3 + m s^4) + \frac{K_2}{6}(3k s^2 + m s^3) + C_1 s + C_2\right], \tag{57}$$

$$\vartheta'(s) = -\frac{1}{1-\varrho}\int_0^s r_2(t)\,dt - \frac{\lambda l}{\sqrt{B D}\,(1-\varrho)}\left[\frac{K_1}{6}(3k s^2 + 2m s^3) + \frac{K_2}{2}(2k s + m s^2) + C_1\right], \tag{58}$$

$$\bar{u}^*(s) = \int_0^s (s-t)\,\bar{r}_1(t)\,dt - \frac{h}{6\,\bar{B}}\left[K_1(h/l)\,s^3 + 3\,\bar{K}_2 s^2\right], \tag{59}$$

$$\bar{u}^*(s)' = \int_0^s \bar{r}_1(t)\,dt - \frac{h}{2\,\bar{B}}\left[K_1(h/l)\,s^2 + 2\,\bar{K}_2 s\right], \tag{60}$$

$$\bar{\vartheta}(s) = \frac{1}{1-\bar{\varrho}}\int_0^s (t-s)\,\bar{r}_2(t)\,dt + \frac{\bar{\lambda} h}{\sqrt{\bar{B}\bar{D}}\,(1-\bar{\varrho})}\left[\frac{K_1}{12}\left(\frac{h}{l}\right)s^4 + \frac{\bar{K}_2}{6}s^3\right] + \bar{C}_1 s\,, \tag{61}$$

$$\bar{\vartheta}'(s) = -\frac{1}{1-\bar{\varrho}}\int_0^s \bar{r}_2(t)\,dt + \frac{\bar{\lambda} h}{\sqrt{\bar{B}\bar{D}}\,(1-\bar{\varrho})}\left[\frac{K_1}{3}\left(\frac{h}{l}\right)s^3 + \frac{\bar{K}_2}{2}s^2\right] + \bar{C}_1\,. \tag{62}$$

Auch hier gelten wieder einschränkend

$$1-\varrho > 0 \quad \text{und} \quad 1-\bar{\varrho} > 0\,,$$

wenn $P$ in den Rahmenstielen als Drucknormalkraft wirkt.

a) Antimetrische Kippform. Aus (16), (18) und (19) folgt mit (55) und (57) wiederum

$$C_2 = \hat{B} = K_2 = 0\,. \tag{63}$$

Die Gleichungen (55) bis (62) liefern in Verbindung mit den Bedingungen (14), (15), (13), (23a) und (24a) das zur Bestimmung von $K_1$, $\bar{K}_2$, $C_1$, $\bar{C}_1$ und $A$ erforderliche Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\,. \tag{64}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \left[-\frac{\bar{\lambda}^2}{1-\bar{\varrho}}\right] & \left[-\lambda\sqrt{\frac{\bar{D}}{B}}\right] & [0] & \left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{D}{B}}\left\{1-\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{\bar{\lambda}}{6\,(1-\bar{\varrho})}\frac{B}{\sqrt{B\,D}}\right\}\right] & \left[-\frac{\bar{\lambda}^2}{6\,(1-\bar{\varrho})}\right] \\ [0] & \left[-\lambda\sqrt{\frac{D}{B}}\right] & [0] & \left[\frac{\lambda}{6}\sqrt{\frac{D}{B}}\left\{1+\left(\frac{h}{l}\right)^3\frac{B}{\bar{B}}\right\}\right] & \left[\left(\frac{h}{l}\right)\frac{\bar{\lambda}}{2}\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\right] \\ [0] & [0] & \left[-\frac{\bar{\lambda}^2}{1-\varrho}\right] & \left[\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{\lambda}{2}\frac{\sqrt{B\,D}}{\bar{B}}+\frac{\bar{\lambda}^2}{1-\varrho}\frac{2k-1}{12}\right] & \left[\bar{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\right] \\ [0] & \left[-k\,\lambda\sqrt{\frac{D}{B}}\right] & \left[\lambda\sqrt{\frac{D}{B}}\right] & \left[\left(\frac{h}{l}\right)-\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{D}{B}}(k-1)-\left(\frac{l}{h}\right)\frac{\lambda}{2}\frac{\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}}{B}-\alpha\right] & \left[\left(\frac{l}{h}\right)\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{B}\,\bar{D}}{B\,D}}\right] \\ \left[\bar{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\right] & [0] & [0] & \left[\left(\frac{h}{l}\right)\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\sqrt{\frac{B\,D}{\bar{B}\,\bar{D}}}\left\{1+\left(\frac{h}{l}\right)\alpha\right\}\right] & [\alpha] \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{q} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{r} = \begin{bmatrix} \int_0^1 r_1(t)\,dt + \frac{1}{1-\bar{\varrho}}\int_0^1 (t-1)\,\bar{r}_2(t)\,dt \\ \int_0^1 (1-t)\,r_1(t)\,dt + \left(\frac{h}{l}\right)\int_0^1 (1-t)\,\bar{r}_1(t)\,dt \\ \int_0^1 \bar{r}_1(t)\,dt + \frac{1}{1-\varrho}\int_0^1 (t-1)\,r_2(t)\,dt \\ \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{D}{B}}\int_0^1 r_2(t)\,dt + \int_0^1 (1-t)\,r_1(t)\,dt - \left(\frac{l}{h}\right)\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{B}\,\bar{D}}{B\,D}}\int_0^1 r_1(t)\,dt \\ \frac{1}{\bar{\lambda}}\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\int_0^1 \bar{r}_2(t)\,dt - \int_0^1 t\,\bar{r}_1(t)\,dt \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \bar{C}_1\,(1-\bar{\varrho})/\bar{\lambda}^2, & X_2 &= A\,\sqrt{B/D}/\lambda, & X_3 &= C_1\,(1-\varrho)/\lambda^2, \\ X_4 &= K_1\,l/\lambda\,\sqrt{B\,D}, & X_5 &= \bar{K}_2\,h/\bar{\lambda}\,\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}} \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

und $\alpha = \bar{v}'(1)/h = -v'(1)/l = y\,[1-\varepsilon\,\mathrm{ctg}(\varepsilon)]$ für größere $P$ nach der Theorie zweiter Ordnung [siehe (53a)] bzw. $\alpha = H\,h^2/3\,E\,J_1$, wenn der Horizontalschub $H$ bei kleinen $P$ und sehr großen Biegesteifigkeiten $E\,J_1$ und $E\,J_2$ nach der Theorie erster Ordnung ermittelt wird. Bei Berücksichtigung von (65) haben die Integralgleichungen (55), (57), (59) und (61) die folgenden, für die numerische Rechnung bequemeren Formen:

$$u^*(s)\,\sqrt{B/D}/\lambda = \int_0^s (s-t)\,\frac{r_1(t)}{\lambda}\,\sqrt{B/D}\,dt - X_4\,\frac{s^3}{6} + X_2\,s\,, \tag{66}$$

$$\vartheta(s)\,(1-\varrho)/\lambda^2 = \int_0^s (t-s)\,\frac{r_2(t)}{\lambda^2}\,dt - \frac{X_4}{12}\,(2\,k\,s^3 - s^4) + X_3\,s\,, \tag{67}$$

$$\bar{u}^*(s)\,\sqrt{\bar{B}/\bar{D}}/\bar{\lambda} = \int_0^s (s-t)\,\frac{\bar{r}_1(t)}{\lambda}\,\sqrt{\bar{B}/\bar{D}}\,dt - \frac{h^2\,\lambda}{l^2\,\bar{\lambda}}\,\sqrt{B\,D/\bar{B}\,\bar{D}}\,X_4\,\frac{s^3}{6} - X_5\,\frac{s^2}{2}\,, \tag{68}$$

$$\bar{\vartheta}(s)\,(1-\bar{\varrho})/\bar{\lambda}^2 = \int_0^s (t-s)\,\frac{\bar{r}_2(t)}{\bar{\lambda}^2}\,dt + \frac{h^2\,\lambda}{l^2\,\bar{\lambda}}\,\sqrt{B\,D/\bar{B}\,\bar{D}}\,X_4\,\frac{s^4}{12} + X_5\,\frac{s^3}{6} + X_1\,s\,. \tag{69}$$

**b) Symmetrische Kippform.** Aus (25) und (56) sowie aus (27a) mit $e_P = 0$ und (58) ergibt sich

$$A = C_1 = 0\,. \tag{70}$$

Weiterhin ist nach (29), (30) und (31)

$$K_1 = \bar{K}_1 = 0 \tag{71a}$$

und

$$\bar{K}_2 = P\,l\,\hat{B}\,. \tag{71b}$$

Die Größen $C_2$, $\hat{B}$, $K_2$ und $\bar{C}_1$ errechnen sich aus dem durch (13), (15), (32a) und (14) mit Hilfe von (70), (71) und (55) bis (62) gebildeten Gleichungssystem

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\,, \tag{72}$$

mit

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} [-1] & \left[\left(\frac{h}{l}\right)\frac{D}{\bar{B}}(1-\varrho)\right] & \left[\frac{3k-1}{6}\right] & [0] \\ [0] & \left[\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{\lambda}{2}\frac{\sqrt{B\,D}}{\bar{B}} - 1\right] & \left[\frac{1}{2}\right] & [0] \\ [0] & \left[\lambda\sqrt{\frac{D}{B}}\left(\alpha - \frac{\bar{\lambda}}{2}\sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{B}}}\right)\right] & \left[1-\left(\frac{l}{h}\right)^2\frac{\bar{\lambda}}{2}\sqrt{\frac{\bar{B}\,\bar{D}}{B}}\right] & \left[\left(\frac{l}{h}\right)\frac{\bar{\lambda}^2\,\bar{D}}{\lambda\sqrt{B\,D}}\right] \\ [0] & \left[-\left(\frac{h}{l}\right)\frac{\lambda\bar{\lambda}}{6\,(1-\bar{\varrho})}\sqrt{\frac{B\,D}{\bar{B}\,\bar{D}}}\right] & [1] & \left[-\frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda}\frac{1}{(1-\bar{\varrho})}\sqrt{\frac{\bar{B}}{D}}\right] \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{q} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2}\left[(1-\varrho)\int_0^1 \bar{r}_1(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)\,r_2(t)\,dt\right] \\ \frac{\sqrt{B/D}}{\lambda}\left[\int_0^1 (1-t)\,r_1(t)\,dt + \left(\frac{h}{l}\right)\int_0^1 (1-t)\,\bar{r}_1(t)\,dt\right] \\ \left(\frac{l}{h}\right)\frac{\bar{D}}{\lambda\sqrt{B\,D}}\left\{\int_0^1 \bar{r}_2(t)\,dt - \bar{\lambda}\sqrt{\frac{\bar{B}}{\bar{D}}}\left[\int_0^1 \bar{r}_1(t)\,dt + \left(\frac{l}{h}\right)\int_0^1 (1-t)\,r_1(t)\,dt\right]\right\} \\ \frac{\sqrt{B/D}}{\lambda\,(1-\bar{\varrho})}\left[(1-\bar{\varrho})\int_0^1 r_1(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)\,\bar{r}_2(t)\,dt\right] \end{bmatrix}, \tag{73}$$

$$X_1 = C_2\,\frac{1-\varrho}{\lambda^2}\,, \qquad X_2 = \hat{B}\,\frac{\sqrt{B/D}}{\lambda}\,,$$
$$X_3 = \frac{K_2\,l}{\lambda\sqrt{B\,D}}\,, \qquad X_4 = \bar{C}_1\,\frac{1-\bar{\varrho}}{\bar{\lambda}^2}$$

und denselben $\alpha$ wie in Abschn. 6a. Mit Hilfe von (73) lauten die Integralgleichungen (55), (57), (59) und (61) wie folgt:

$$u^*(s)\,\frac{\sqrt{B/D}}{\lambda} = \int_0^s (s-t)\,\frac{r_1(t)}{\lambda}\,\sqrt{B/D}\,dt - X_3\,\frac{s^2}{2} + X_2\,, \tag{74}$$

$$\vartheta(s)\,\frac{1-\varrho}{\lambda^2} = \int_0^s (t-s)\,\frac{r_2(t)}{\lambda^2}\,dt - \frac{X_3}{6}\,(3\,k\,s^2 - s^3) + X_1\,, \tag{75}$$

$$\bar{u}^*(s)\,\frac{\sqrt{\bar{B}/\bar{D}}}{\bar{\lambda}} = \int_0^s (s-t)\,\frac{\bar{r}_1(t)}{\bar{\lambda}}\,\sqrt{\bar{B}/\bar{D}}\,dt - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)\frac{\lambda^2}{\bar{\lambda}}\,\frac{D}{\sqrt{\bar{B}/\bar{D}}}\,X_2\,s^2\,, \tag{76}$$

$$\bar{\vartheta}(s)\,\frac{1-\bar{\varrho}}{\bar{\lambda}^2} = \int_0^s (t-s)\,\frac{\bar{r}_2(t)}{\bar{\lambda}^2}\,dt + \frac{1}{6}\left(\frac{h}{l}\right)\frac{\lambda^2}{\bar{\lambda}}\,\frac{D}{\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}}\,X_2\,s^3 + X_4\,s\,. \tag{77}$$

**7. Numerisches Verfahren.** In den rechten Seiten $\mathfrak{r}$ der Gleichungssysteme $\mathfrak{A}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{S}\,\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$ (vgl. Abschn. **5** und **6**) kommen die unbekannten Funktionen $\bar{\vartheta}$ bzw. $u^*$, $\vartheta$, $\bar{u}^*$ und $\bar{\vartheta}$ unter bestimmten Integralen vor. Die Lösung muß mit Hilfe der Kehrmatrizen geschehen:

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{r}\,. \tag{78}$$

Die Simpsonformel

$$\int_0^1 I(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau+1} g_i\,I_i \tag{79}$$

stellt die Grundlage der numerischen Rechnung dar, die wegen der komplizierten Bauart der Integralgleichungen nur auf elektronischen Rechenautomaten erfolgen kann. In (79) ist $\tau$ die Zahl der Intervalle, $g_i$ der Simpsonkoeffizient und $I_i$ der Integrand an der Stützstelle $t_i$. Durch Anwendung von (79) auf die Integralgleichungen der Abschn. **5** und **6** ergeben sich homogene Gleichungssysteme, die als Matrizeneigenwertprobleme, wie folgt, lauten:

$$[\mathfrak{K}(\delta) - \mathfrak{E}]\,\mathfrak{x} = 0\,. \tag{80}$$

Die Elemente des Vektors $\mathfrak{x}$ bestehen aus den $\bar{\vartheta}(s_i)$ bzw. aus den $u^*(s_i)$, $\vartheta(s_i)$, $\bar{u}^*(s_i)$ und $\bar{\vartheta}(s_i)$ an den Stützstellen $s_i$ (vgl. Abschn. **5** und **6**). Weiterhin ist $\delta$ der Matrizeneigenwert, $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix und $\mathfrak{K}$ die aus dem Kern bzw. den „Teilkernen" $K_{ik}$ gebildete Koeffizientenmatrix (Abb. 12).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $K_{uu}$ | $K_{u\vartheta}$ | $K_{u\bar{u}}$ | $K_{u\bar{\vartheta}}$ |
| $K_{\vartheta u}$ | $K_{\vartheta\vartheta}$ | $K_{\vartheta\bar{u}}$ | $K_{\vartheta\bar{\vartheta}}$ |
| $K_{\bar{u}u}$ | $K_{\bar{u}\vartheta}$ | $K_{\bar{u}\bar{u}}$ | $K_{\bar{u}\bar{\vartheta}}$ |
| $K_{\bar{\vartheta}u}$ | $K_{\bar{\vartheta}\vartheta}$ | $K_{\bar{\vartheta}\bar{u}}$ | $K_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}}$ |

Abb. 12. Matrix $\mathfrak{K}$ und „Teilkerne" $K_{ik}$

In den $K_{ii}$ setzen sich die Koeffizienten links von der Hauptdiagonale aus zwei Anteilen zusammen: aus den von den $X_n$ und von den Integralen mit den Grenzen 0 und $s$ herrührenden Gliedern [vgl. etwa (74)]. Dagegen bestehen die Koeffizienten rechts von der Hauptdiagonale nur aus den durch die $X_n$ bedingten Gliedern. Die $\delta$ erhält man durch Probieren. Für angenommene $\delta_a$ wird mit Hilfe des *Gauß*schen Eliminationsverfahrens der Wert $\Delta N$ der Nennerdeterminante von (80) berechnet und über $\delta_a$ aufgetragen. Der zu $\Delta N = 0$ gehörende $\delta$-Wert ist der gesuchte Matrizeneigenwert.

Nun zeigen wir die Zusammenhänge zwischen $\delta$ und $\lambda$, $\bar{\lambda}$, $\varrho$, $\bar{\varrho}$, $\tilde{k}^2$, $k$ der Abschn. **5** und **6**.

Im Abschn. **5** gilt

$$H = \sum_{r=1}^{4} a_r\,M^r\,.$$

Wir wählen als Eigenwert

$$M\,l/\sqrt{B\,D} = \delta\,.$$

Mit $\bar{a}_r = a_r\,h\,(\sqrt{B\,D}/l)^{r-1}$ und $R(\delta) = \sum_{r=1}^{4} \bar{a}\,\delta^r$ wird $H = (\sqrt{B\,D}/h\,l)\,R(\delta)$. Damit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = \delta - R(\delta)\,, \qquad \bar{\lambda} = (h/l)\sqrt{B\,D/\bar{B}\,\bar{D}}\,R(\delta)\,, \qquad \varrho = (i_p^2/h\,l)\sqrt{B/D}\,R(\delta) \\ &\text{und} \\ &\tilde{k}^2 = \left\{(l/h)\sqrt{D/B}\,R(\delta) + \frac{[\delta - R(\delta)]^2}{1-\varrho}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Im Abschn. **6** haben wir

$$H = \sum_{r=1}^{4} a_r\,P^r\,.$$

Es sei $\delta = \lambda = P l^2/\sqrt{B\,D}$. Mit $\bar{a}_r = a_r \left(\sqrt{B\,D}/l^2\right)^r h^2/\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}$ und $R(\delta) = \sum_{r=1}^{4} \bar{a}_r \delta^r$ erhalten wir $H = \left(\sqrt{\bar{B}\,\bar{D}}/h^2\right) R(\delta)$. Damit ist

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\lambda} = R(\delta)\,, \qquad \varrho = (i_p/h)^2 \sqrt{\bar{B}\,\bar{D}/D^2}\, R(\delta)\,, \qquad \bar{\varrho} = (\bar{i}_p/l)^2 \sqrt{B\,D/\bar{D}^2}\, \delta \\ \text{und} \quad &k = 1 - (l/h) \sqrt{\bar{B}\,\bar{D}/B\,D}\, R(\delta)/\delta\,. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Bei sehr schmalen Rechteckquerschnitten sind die Kipplasten sehr klein, so daß man den Horizontalschub in guter Näherung nach der Theorie erster Ordnung ermitteln und $\varrho$ und $\bar{\varrho}$ vernachlässigen kann. Es entsteht dann die lineare Beziehung $R(\delta) = a^* \delta$, und wir erhalten aus (81)

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = (1 - a^*)\,\delta\,, \qquad \bar{\lambda} = (h/l) \sqrt{B\,D/\bar{B}\,\bar{D}}\, a^* \delta\,, \qquad \varrho = 0 \\ \text{und} \quad &\tilde{k}^2 = \delta \left[(l/h) \sqrt{D/B}\, a^* + (1 - a^*)^2\, \delta\right], \end{aligned}\right\} \tag{81a}$$

bzw. aus (82)

$$\bar{\lambda} = a^* \delta\,, \qquad \varrho = \bar{\varrho} = 0 \qquad \text{und} \qquad k = 1 - (l/h) \sqrt{\bar{B}\,\bar{D}/B\,D}\, a^*\,. \tag{82a}$$

Abschließend ein Wort über die Wahl der Koeffizienten $g_i$ [vgl. (79)]. Bei Rechteckquerschnitten verwendet man für die „Teilkerne" $K_{uu}$, $K_{\vartheta\vartheta}$, $K_{\bar{u}\bar{u}}$ und $K_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}}$ (Abb. 12) wegen des Knickes bei $s = t$ (Hauptdiagonale!) am zweckmäßigsten die Trapezformel. Bei $I$-Querschnitten gilt das nur für $K_{uu}$ und $K_{\bar{u}\bar{u}}$. Für die restlichen „Teilkerne" $K_{ik}$ empfehlen sich auch die andern Simpsonformeln. Lediglich die Rechteckformel [in (73) sind alle $g_i = 1$] sei ausgeschlossen. Denn sie nähert die Integrale oft schlecht an, und dadurch werden die Eigenwerte $\delta$ zu ungenau.

Der Verfasser dankt den Herren Prof. Dr.-Ing. *K. Marguerre* und Dipl.-Ing. *E. Ludwig* für wertvolle Hinweise und freundliche Ratschläge.

(Eingegangen am 17. Oktober 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *L. Kraus*, Wiesbaden, Idsteinerstraße 11.

# Zwei Extremalprinzipien der irreversiblen Thermodynamik

Von **H. Ziegler**

*Der Erinnerung an Hans Kauderer gewidmet*

**1. Einleitung.** In der Thermodynamik irreversibler Prozesse spielen, soweit es sich um lineare Vorgänge handelt, die Reziprozitätsrelationen von *L. Onsager*[1] die zentrale Rolle. Diese Relationen sind schon von ihrem Begründer, aber auch seither[2] und insbesondere im Zusammenhang mit ihrer rheologischen Bedeutung[3] als Ausdruck gewisser Extremalprinzipien gedeutet worden. Im Anschluß hieran sollen im folgenden zwei weitere Extremalprinzipien formuliert werden, die mit den *Onsager*schen Beziehungen äquivalent sind und den Vorzug haben, besonders einfach sowie physikalisch einleuchtend zu sein.

Man kann diese Prinzipien im Gegensatz zu den Reziprozitätsrelationen auch auf nichtlineare Prozesse anwenden. Sie führen in diesem Falle auf die vom Verfasser[4] vorgeschlagene Verallgemeinerung der Onsagerschen Theorie.

**2. Die Hauptsätze.** Es sollen hier einfachheitshalber sowie im Hinblick auf die Anwendungen in der Mechanik der Kontinua nur Systeme betrachtet werden, deren Zustand durch die mechanischen Lagekoordinaten $x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sowie die Temperatur $\vartheta > 0$ beschrieben wird. Die an einem solchen System geleistete Elementararbeit ist, wenn hier und im folgenden die Summationsregel verwendet wird, durch

$$dA = X_k \, dx_k \tag{2.1}$$

gegeben, wobei die $X_k$ die zu den $x_k$ gehörenden verallgemeinerten Kräfte bezeichnen.

Der Inhalt des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik besteht in der Aussage, daß das System eine durch die Zustandsvariablen $x_k$ und $\vartheta$ bestimmte Energie $U(x_k, \vartheta)$ besitze, deren Inkrement sich gemäß

$$dU = dA + dQ \tag{2.2}$$

aus der mechanischen Arbeit (2.1) und der Wärmezufuhr $dQ$ zusammensetzt.

Nach dem zweiten Hauptsatz gibt es eine weitere Zustandsfunktion, die Entropie $S(x_k, \vartheta)$, deren Inkrement der Bedingung

$$\vartheta \, dS \geqq dQ \tag{2.3}$$

genügt. Gilt in (2.3) das Gleichheitszeichen, dann wird die zugehörige Zustandsänderung als reversibel bezeichnet, andernfalls als irreversibel. Man kann (2.3) auch in die Aussage kleiden, daß sich der elementare Entropiezuwachs gemäß

$$dS = dS^r + dS^i \tag{2.4}$$

aus der Entropiezufuhr

$$dS^r = \frac{1}{\vartheta} dQ \tag{2.5}$$

von außen und der Entropieproduktion $dS^i$ im Inneren des Systems zusammensetze, wobei je nach der Art des Prozesses

$$dS^i \geqq 0 \tag{2.6}$$

ist.

**3. Irreversible Prozesse.** Die Elementararbeit läßt sich nach (2.2), (2.5) und (2.4) in den Formen

$$dA = dU - dQ = dU - \vartheta \, dS^r = dU - \vartheta \, dS + \vartheta \, dS^i \tag{3.1}$$

---

[1] *L. Onsager*, Phys. Rev. 37 (II), (1931) S. 405 und 38 (II), (1931) S. 2665. Vgl. auch *H. B. G. Casimir*, Rev. mod. Phys. 17, (1945) S. 343.

[2] *S. R. de Groot*, Thermodynamics of Irreversible Processes, Amsterdam 1952.

[3] *M. A. Biot*, J. appl. Phys. 25 (1954), S. 1385; Phys. Rev. 97 (1955), S. 1463; Variational and Lagrangian Methods in Viscoelasticity, IUTAM-Colloquium Madrid, S. 251, Berlin 1956.

[4] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 25 (1957), S. 58; Z. angew. Math. Phys. 9b (1958), S. 748.

oder ausführlich mit

$$X_k\,dx_k = \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} - \vartheta\,\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)dx_k + \left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \vartheta\,\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)d\vartheta + \vartheta\,dS^i \tag{3.2}$$

anschreiben. Bei einer Zustandsänderung, welche die Lagekoordinaten $x_k$ unverändert läßt und also in einer reinen Erwärmung oder Abkühlung besteht, muß die Summe der beiden letzten Terme verschwinden. Das ist aber sowohl für Zu- wie für Abnahmen von $\vartheta$ wegen (2.6) nur möglich, wenn

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \vartheta\,\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0 \tag{3.3}$$

ist. Hieraus folgt, daß das letzte Glied in (3.2) die Gestalt einer Elementararbeit

$$\vartheta\,dS^i = X_k^i\,dx_k = dA^i \tag{3.4}$$

besitzt. Man nennt sie die Dissipationsarbeit und hat nach (2.6) je nach Art des Prozesses

$$dA^i \geqq 0\,. \tag{3.5}$$

Mit (3.4) und (3.3) gewinnt man aus (3.2)

$$X_k^r = X_k - X_k^i = \frac{\partial U}{\partial x_k} - \vartheta\,\frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(U - \vartheta\,S) \tag{3.6}$$

oder

$$X_k^r = \frac{\partial F}{\partial x_k} \qquad \text{mit} \qquad F = U - \vartheta\,S \tag{3.7}$$

und daher

$$dA^r = dA - dA^i = X_k^r\,dx_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}\,dx_k\,. \tag{3.8}$$

Jede Kraft $X_k$ stellt sich damit als Summe von zwei Beiträgen dar. Der eine, $X_k^r$, leitet sich gemäß (3.7) von der freien Energie $F$ her, die mit $U$ und $S$ eine Zustandsfunktion ist. Er hängt also nur von den Zustandsvariablen $x_k$, $\vartheta$ ab, und da er nach (3.4) keinen Beitrag zur Entropieproduktion $dS^i$ leistet, repräsentiert er gemäß (2.6) den reversiblen Teil des Prozesses. Der andere, $X_k^i$, bestimmt die Entropieproduktion und damit den irreversiblen Teil der Zustandsänderung. Er wechselt nach (3.4) und (3.5) mit $dx_k$ sein Vorzeichen, hängt also jedenfalls von der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\dot{x}_k$ ab[1].

**4. Grenzfälle.** Es ist nützlich, wenn auch in diesem Zusammenhang nicht unerläßlich, noch einige Begriffe zu definieren. Je nach der Größe des Anteils $dA^i$ in $dA$ kann man von Prozessen sprechen, die mehr oder weniger stark irreversibel sind. In diesem Sinne kann man ein System, bei dem für beliebige Wahl der $dx_k$ die Dissipationsarbeit $dA^i = 0$ ist, als reversibel und ein solches, bei dem stets $dA^i = dA$, mithin $dA^r = 0$ ist, als vollkommen irreversibel bezeichnen. Beispiele für die beiden Fälle sind das ideale Gas bzw. die inkompressible zähe Flüssigkeit.

In der Thermodynamik sind bis vor kurzem ausschließlich reversible Systeme behandelt worden. Erst die neuere Literatur hat sich irreversiblen Prozessen zugewandt, und zwar beschränkt sie sich meist stillschweigend auf vollkommen irreversible Systeme. Hier verschwinden die $X_k^r$ identisch; nach (3.7) ist also die freie Energie nur eine Funktion der Temperatur, d. h. es gilt

$$U - \vartheta S = F(\vartheta)\,. \tag{4.1}$$

Leitet man beide Seiten nach $\vartheta$ ab, so erhält man mit Rücksicht auf (3.3)

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\,. \tag{4.2}$$

Somit sind auch die Entropie und die Energie Funktionen der Temperatur allein und daher jede durch die andere gegeben. In der Tat folgt aus (4.1) und (4.2)

$$U = \vartheta S - \int S\,d\vartheta \tag{4.3}$$

und umgekehrt

$$S = \int \frac{dU}{\vartheta}\,. \tag{4.4}$$

[1] Der obere Zeiger $r$ bzw. $i$ bezeichnet den reversiblen bzw. irreversiblen Anteil der betreffenden Größe. Man kann diese Unterscheidung entweder in den Lagekoordinaten oder in den verallgemeinerten Kräften treffen. In der zuletzt zitierten Arbeit (Fußnote 4, S. 410) hat der Verfasser den ersten Weg gewählt, hier den bereits von *B. T. Chu* (Deformation and Thermal Behavior of Linear Visco-Elastic Materials, Report Brown University, Providence, R. I., 1957) beschrittenen zweiten Weg, der in diesem Zusammenhang einfacher erscheint.

**5. Die Onsagerschen Relationen.** Die vorstehenden Überlegungen beruhen auf den beiden Hauptsätzen sowie auf der Annahme, daß der Zustand des Systems durch die mechanischen Koordinaten $x_k$ sowie die Temperatur $\vartheta$ beschrieben werde. Darüber hinaus sind keine Voraussetzungen eingeführt worden.

Sobald die Zustandsfunktionen $U$ und $S$ bekannt sind, ist nach (3.7) der Zusammenhang zwischen den $x_k$ und den $X_k^i$ gegeben. Hinsichtlich der $X_k^i$ (bzw. der $X_k$ im vollkommen irreversiblen System) folgt indessen aus den beiden Hauptsätzen bloß, daß sie jedenfalls von den $\dot{x}_k$ abhängen, und daß die Dissipationsleistung

$$L^i = X_k^i \dot{x}_k \geqq 0 \tag{5.1}$$

ist, wobei das Gleichheitszeichen im allgemeinen nur im Fall der Ruhe gilt.

Die *Onsager*sche Theorie beschränkt sich auf Systeme, in denen die $X_k^i$ nur von den $\dot{x}_k$ abhängen, und zwar in der linearen Form

$$X_k^i = a_{kj} \dot{x}_j \,. \tag{5.2}$$

Ihr zufolge ist die Matrix $(a_{kj})$ symmetrisch, d. h. es gelten die *Onsager*schen Relationen

$$a_{jk} = a_{kj} \,. \tag{5.3}$$

Führt man (5.2) in (5.1) ein, so ergibt sich

$$L^i = a_{kj} \dot{x}_k \dot{x}_j = D(\dot{x}_k) \geqq 0 \,. \tag{5.4}$$

Hiermit ist die Dissipationsleistung vermittels der Dissipationsfunktion $D$ in den $\dot{x}_k$ ausgedrückt, und (5.2) kann mit Rücksicht auf (5.3) in der Form

$$X_k^i = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \tag{5.5}$$

angeschrieben werden. Da umgekehrt aus dem Vergleich von (5.2) und (5.5) auch (5.3) folgt, sind die Beziehungen (5.5) den *Onsager*schen Relationen äquivalent. Man kann sie im euklidischen Raum der $\dot{x}_k$ dahin deuten, daß der Kraftvektor[1] $X_k^i$ der halbe Gradient der Funktion $D(\dot{x}_k)$ und daher in jedem Punkt $\dot{x}_k$ normal zu der ihn enthaltenden Hyperfläche $D = \text{const}$ sei. Mit der quadratischen Form (5.4) ist die Matrix $(a_{kj})$ im allgemeinen positiv definit. Die Niveauflächen von $D(\dot{x}_k)$ können daher als Hyperellipsoide mit dem Ursprung als Mittelpunkt bezeichnet werden. Sie sind nach (5.4) ähnlich, und zwar enthält jede von ihnen diejenigen mit kleineren Werten von $D$. Somit hat der Kraftvektor $X_k^i$ die Richtung der äußeren Normale $\nu_k$ im Punkt $\dot{x}_k$.

Abb. 1 veranschaulicht diese Zusammenhänge in zwei Dimensionen.

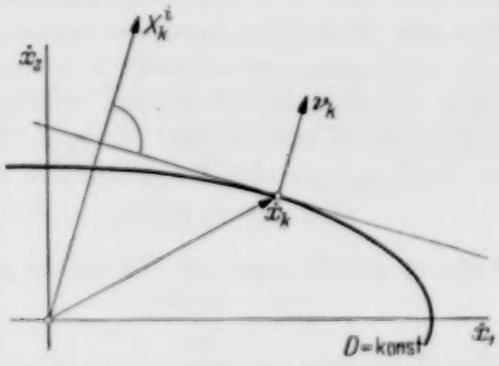



Abb. 1. Das Prinzip vom kleinsten Kraftbetrag im zweidimensionalen Geschwindigkeitsraum.

**6. Das Prinzip vom kleinsten Kraftbetrag.** Die Beziehungen (5.5) und damit die *Onsager*schen Relationen können als Ausdruck zweier verschiedener Extremalprinzipien gedeutet werden. Jedes derselben stellt in physikalisch durchaus einleuchtender Weise den Begriff der Dissipationsfunktion in den Vordergrund.

Das erste Extremalprinzip lautet wie folgt:

Nimmt bei gegebener Dissipationsleistung $L^i$ und vorgeschriebener Richtung des Kraftvektors $X_k^i$ dessen Betrag unter der Nebenbedingung $D(\dot{x}_k) = L^i$ ein

[1] Darunter ist hier selbstverständlich nicht ein Vektor im physikalischen Raum, sondern der Vektor mit den Komponenten $X_k^i$ im euklidischen Raum der $\dot{x}_k$ zu verstehen.

**Minimum an, dann bestimmt sich hieraus der Zusammenhang zwischen den Vektoren $X_k^i$ und $\dot{x}_k$.**

Dieses Prinzip wird durch Abb. 1 nahegelegt. Die Angabe von

$$L^i = D(\dot{x}_k) = X_k^i \dot{x}_k > 0 , \tag{6.1}$$

schreibt nämlich als geometrischen Ort für den Punkt $\dot{x}_k$ ein bestimmtes Hyperellipsoid vor und fixiert gleichzeitig das Skalarprodukt der Vektoren $X_k^i$ und $\dot{x}_k$. Der kleinste Betrag des in seiner Richtung festgelegten Vektors $X_k^i$ ergibt sich für den Vektor $\dot{x}_k$, dessen Projektion auf die Richtung von $X_k^i$ maximal ist, d. h. für denjenigen Punkt $\dot{x}_k$ auf dem Hyperellipsoid, dessen äußere Normale $v_k$ die Richtung $X_k^i$ hat.

Für die strenge Begründung sei der Kraftvektor $X_k^i$ durch seinen Betrag $B \geqq 0$ und den festen Einheitsvektor $v_k$ dargestellt. Dann gilt

$$X_k^i \dot{x}_k = B v_k \dot{x}_k = L^i \geqq 0 , \tag{6.2}$$

wobei $L^i$ der vorgeschriebene Wert der Dissipationsleistung ist, und das Minimum von $B$ wird für diejenigen Vektoren $\dot{x}_k$ erhalten, welche das Skalarprodukt $v_k \dot{x}_k$ zum Maximum machen. Dabei sind zum Vergleich nur die Vektoren $\dot{x}_k$ zuzulassen, welche der Nebenbedingung

$$D(\dot{x}_k) = L^i \tag{6.3}$$

genügen; ferner wird man sich wegen (6.2) auf denjenigen Teil der Hyperfläche (6.3) beschränken, auf dem $v_k \dot{x}_k \geqq 0$ ist. Auf seinem Rand ist $v_k \dot{x}_k = 0$ und somit das Skalarprodukt minimal. Alle weiteren Extrema ergeben sich aus den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} [v_j \dot{x}_j - \lambda D(\dot{x}_j)] = 0 \tag{6.4}$$

bzw.

$$v_k - \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} = 0 , \tag{6.5}$$

in denen $\lambda$ den *Lagrange*schen Multiplikator bezeichnet.

Macht man jetzt von der speziellen Form (5.4) der Dissipationsfunktion Gebrauch, so folgt zunächst die Eulersche Beziehung

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = 2 D . \tag{6.6}$$

Sodann gilt nach (6.2), (6.5) und (6.6)

$$L^i = B v_k \dot{x}_k = B \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = 2 B \lambda D . \tag{6.7}$$

Damit ergibt sich $\lambda$ mit Rücksicht auf (6.3) aus

$$B \lambda = \frac{1}{2} , \tag{6.8}$$

und man hat zufolge (6.5)

$$X_k^i = B v_k = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \tag{6.9}$$

in Übereinstimmung mit (5.5).

Aus der Beziehung (6.9), die man auch in der Form (5.2) schreiben kann, folgt die Eindeutigkeit der Lösung des Extremalproblems (6.4). Da ferner nach (6.5), (6.6) und (6.8) für den Lösungsvektor

$$v_k \dot{x}_k = \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = 2 \lambda D = \frac{D}{B} \geqq 0 \tag{6.10}$$

gilt, ist das Extremum ein Maximum. Damit ist die Äquivalenz der *Onsager*schen Relationen mit dem zu Beginn dieses Abschnittes formulierten Minimalprinzip nachgewiesen und überdies gezeigt, daß das Prinzip im vorliegenden Fall genau eine Lösung besitzt.

**7. Das Prinzip von der größten Dissipationsleistung.** Mit dem eben besprochenen ist das folgende Extremalprinzip aufs engste verwandt:

**Nimmt bei gegebenem Kraftvektor $X_k^i$ die Dissipationsleistung $L^i$ unter der Nebenbedingung $L^i = D(\dot{x}_k)$ ein Maximum an, dann bestimmt sich hieraus der Zusammenhang zwischen den Vektoren $X_k^i$ und $\dot{x}_k$.**

Dieses Prinzip wird durch Abb. 2 nahegelegt. Mit $X_k^i$ ist nämlich die Stellung der zum Vergleich zugelassenen Hyperebenen

$$X_k^i \dot{x}_k = L^i \tag{7.1}$$

gegeben. Die zugehörigen Hyperellipsoide

$$D(\dot{x}_k) = L^i \tag{7.2}$$

sind ähnlich, und da der Abstand $L^i$ der Hyperebenen vom Ursprung mit dem Quadrat der Linearabmessungen der zugehörigen Hyperellipsoide wächst, läßt sich die Nebenbedingung nur für kleinere positive Werte von $L^i$ erfüllen. Der Höchstwert ist durch diejenige Hyperebene bestimmt, welche das zugehörige Hyperellipsoid gerade noch berührt, und im Berührungspunkt hat die äußere Normale $v_k$ des Hyperellipsoides wieder die Richtung von $X_k^i$.

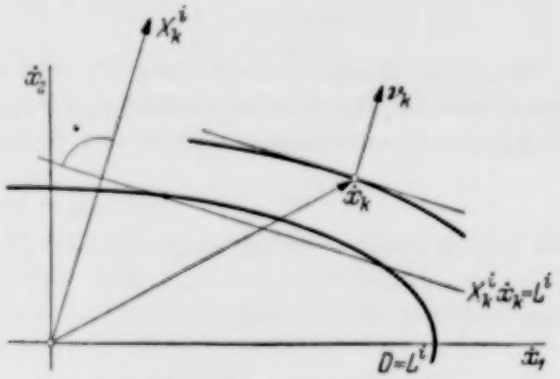



Abb. 2. Das Prinzip von der größten Dissipationsleistung im zweidimensionalen Geschwindigkeitsraum.

Zur strengen Begründung sei zunächst festgestellt, daß alle der Nebenbedingung (7.2) genügenden Punkte auf der Hyperfläche

$$F(\dot{x}_k) = D(\dot{x}_k) - X_k^i \dot{x}_k = 0 \tag{7.3}$$

liegen, von der wieder nur das Teilstück mit $X_k^i \dot{x}_k \geqq 0$ betrachtet werden muß. Auf seinem Rand ist $X_k^i \dot{x}_k = 0$ und daher die Dissipationsleistung minimal. Alle weiteren Extrema ergeben sich aus den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} [X_j^i \dot{x}_j - \lambda F(\dot{x}_j)] = 0 , \tag{7.4}$$

wobei $\lambda$ wieder der *Lagrange*sche Multiplikator ist. Führt man (7.4) mit Hilfe von (7.3) aus, so kommt

$$(1 + \lambda) X_k^i - \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} = 0 . \tag{7.5}$$

Wenn man jetzt von der speziellen Form (5.4) der Dissipationsfunktion Gebrauch macht, so folgt zunächst wieder die *Euler*sche Beziehung (6.6) sowie aus (7.1), (7.5) und (6.6)

$$L^i = X_k^i \dot{x}_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = \frac{2\lambda}{1+\lambda} D , \tag{7.6}$$

mithin nach (7.2)

$$\lambda = 1 . \tag{7.7}$$

Damit geht aber (7.5) wieder in

$$X_k^i = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} , \tag{7.8}$$

d. h. in die Beziehung (5.5) über.

Aus der Relation (7.8), die man auch in der Form (5.2) schreiben kann, folgt die Eindeutigkeit der Lösung des Extremalproblems (7.4). Da ferner nach (7.1) und (7.2) für den Lösungsvektor

$$X_k^i \dot{x}_k = D \geqq 0 \tag{7.9}$$

gilt, ist das Extremum ein Maximum. Damit ist die Äquivalenz der *Onsager*schen Relationen mit dem zu Beginn dieses Abschnittes formulierten Maximalprinzip nachgewiesen und überdies gezeigt, daß das Prinzip im vorliegenden Fall genau eine Lösung besitzt.

**8. Verallgemeinerung.** Die *Onsager*sche Theorie ist nur solange sinnvoll, als der Zusammenhang zwischen den Kräften $X_k^i$ und den Geschwindigkeiten $\dot{x}_k$ die lineare Gestalt (5.2) hat. Im Gegensatz hierzu behalten die eben besprochenen Extremalprinzipien auch für allgemeinere Zusammenhänge zwischen den Kräften und den Geschwindigkeiten ihren Sinn. Es liegt daher nahe, diese Prinzipien als Verallgemeinerungen der *Onsager*schen Theorie zu betrachten und nach den Einschränkungen zu fragen, welche sie den möglichen Zusammenhängen zwischen den $X_k^i$ und den $\dot{x}_k$ auferlegen.

Zu diesem Zweck seien Systeme betrachtet, in denen die $X_k^i$ wiederum bloß von den $\dot{x}_k$ abhängen. Ferner sei angenommen, daß die Dissipationsfunktion $D(\dot{x}_k)$, die jetzt nicht mehr quadratisch zu sein braucht, aber nach wie vor keine negativen Werte annehmen darf, glatt sei. Da man die praktisch zu erwartenden Funktionen $D(\dot{x}_k)$ wohl mit genügender Genauigkeit durch glatte Funktionen annähern kann, bedeutet diese letzte Annahme keine wesentliche Einschränkung.

Geht man jetzt vom Prinzip in Abschnitt **6** aus, so kann man die Beziehungen (6.2) bis (6.5) übernehmen. Statt (6.7) hat man unter Berücksichtigung von (6.3)

$$L^i = B\, v_k\, \dot{x}_k = B\, \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = D\,, \tag{8.1}$$

mithin

$$B\, \lambda = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D \tag{8.2}$$

und daher, da nach (6.5)

$$X_k^i = B\, v_k = B\, \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \tag{8.3}$$

ist,

$$X_k^i = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}. \tag{8.4}$$

Das ist die vom Verfasser in einer früheren Arbeit[1] vorgeschlagene und dort durch eine semistatistische Betrachtung begründete Beziehung, welche auch im allgemeineren Fall die Orthogonalität des Vektors $X_k^i$ auf der Fläche $D = \text{const}$ statuiert.

In ähnlicher Weise kann man vom Prinzip in Abschnitt **7** ausgehen und die Beziehungen (7.1) bis (7.5) übernehmen. Statt (7.6) kommt jetzt mit Rücksicht auf (7.2)

$$L^i = X_k^i\, \dot{x}_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = D\,, \tag{8.5}$$

mithin

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D \tag{8.6}$$

und daher nach (7.5) wiederum (8.4). Die beiden Extremalprinzipien sind also auch in diesem allgemeineren Fall äquivalent. Im übrigen prüft man leicht nach, daß (8.4) mit der Dissipationsfunktion (5.4), d. h. mit (6.6) auf (5.5) zurückführt.

**9. Bemerkungen.** Es ist klar, daß die Verallgemeinerung der Prinzipien vom kleinsten Kraftbetrag und von der größten Dissipationsleistung auf nichtlineare Zusammenhänge zwischen den $X_k^i$ und den $\dot{x}_k$, wie sie im letzten Abschnitt vorgeschlagen worden ist, rein hypothetischen Charakter hat. Immerhin sind aber die Beziehungen (8.4), wie bereits bemerkt wurde, ursprünglich auf ganz anderem Wege gewonnen worden und ruhen damit auf zwei verschiedenen Stützen. Ferner darf darauf hingewiesen werden, daß insbesondere das Prinzip von Abschnitt **7** vom physikalischen Standpunkt aus recht suggestiv erscheint: wenn nach dem zweiten Hauptsatz jedes abgeschlossene System dem Zustand maximaler Entropie zustrebt, so erscheint die Annahme nicht unvernünftig, daß ein System unter gegebenen Kräften $X_k^i$ seinen Zustand derart ändere, daß in seinem Inneren in jedem Augenblick ein Maximum an Entropie produziert wird. Gerade dies ist aber nach (3.4) der Inhalt des Prinzips von der größten Dissipationsleistung.

Schließlich darf wohl überhaupt nicht erwartet werden, daß eine Aussage über den Ablauf irreversibler Prozesse ohne Verwendung gewisser plausibler Annahmen zu formulieren sei, nachdem schon die statistische Begründung der *Onsager*schen Theorie, wie *H. B. G. Casimir*[2] nachgewiesen hat, von solchen Zusatzvoraussetzungen Gebrauch machen muß.

[1] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 9b (1958) S. 748.
[2] *H. B. G. Casimir*, a. a. O.

Dieses Prinzip wird durch Abb. 2 nahegelegt. Mit $X_k^i$ ist nämlich die Stellung der zum Vergleich zugelassenen Hyperebenen

$$X_k^i \dot{x}_k = L^i \tag{7.1}$$

gegeben. Die zugehörigen Hyperellipsoide

$$D(\dot{x}_k) = L^i \tag{7.2}$$

sind ähnlich, und da der Abstand $L^i$ der Hyperebenen vom Ursprung mit dem Quadrat der Linearabmessungen der zugehörigen Hyperellipsoide wächst, läßt sich die Nebenbedingung nur für kleinere positive Werte von $L^i$ erfüllen. Der Höchstwert ist durch diejenige Hyperebene bestimmt, welche das zugehörige Hyperellipsoid gerade noch berührt, und im Berührungspunkt hat die äußere Normale $\nu_k$ des Hyperellipsoides wieder die Richtung von $X_k^i$.

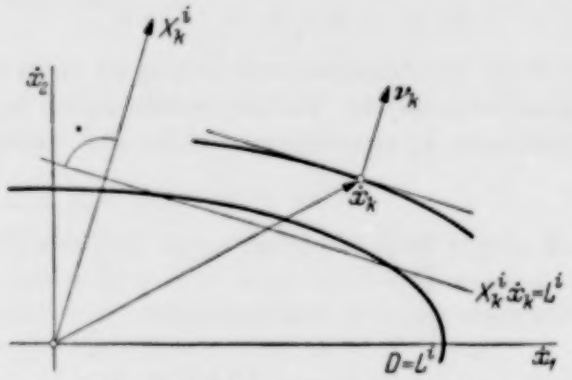



Abb. 2. Das Prinzip von der größten Dissipationsleistung im zweidimensionalen Geschwindigkeitsraum.

Zur strengen Begründung sei zunächst festgestellt, daß alle der Nebenbedingung (7.2) genügenden Punkte auf der Hyperfläche

$$F(\dot{x}_k) = D(\dot{x}_k) - X_k^i \dot{x}_k = 0 \tag{7.3}$$

liegen, von der wieder nur das Teilstück mit $X_k^i \dot{x}_k \geqq 0$ betrachtet werden muß. Auf seinem Rand ist $X_k^i \dot{x}_k = 0$ und daher die Dissipationsleistung minimal. Alle weiteren Extrema ergeben sich aus den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} [X_j^i \dot{x}_j - \lambda F(\dot{x}_j)] = 0 , \tag{7.4}$$

wobei $\lambda$ wieder der *Lagrange*sche Multiplikator ist. Führt man (7.4) mit Hilfe von (7.3) aus, so kommt

$$(1 + \lambda) X_k^i - \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} = 0 . \tag{7.5}$$

Wenn man jetzt von der speziellen Form (5.4) der Dissipationsfunktion Gebrauch macht, so folgt zunächst wieder die *Euler*sche Beziehung (6.6) sowie aus (7.1), (7.5) und (6.6)

$$L^i = X_k^i \dot{x}_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = \frac{2\lambda}{1+\lambda} D , \tag{7.6}$$

mithin nach (7.2)

$$\lambda = 1 . \tag{7.7}$$

Damit geht aber (7.5) wieder in

$$X_k^i = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} , \tag{7.8}$$

d. h. in die Beziehung (5.5) über.

Aus der Relation (7.8), die man auch in der Form (5.2) schreiben kann, folgt die Eindeutigkeit der Lösung des Extremalproblems (7.4). Da ferner nach (7.1) und (7.2) für den Lösungsvektor

$$X_k^i \dot{x}_k = D \geqq 0 \tag{7.9}$$

gilt, ist das Extremum ein Maximum. Damit ist die Äquivalenz der *Onsager*schen Relationen mit dem zu Beginn dieses Abschnittes formulierten Maximalprinzip nachgewiesen und überdies gezeigt, daß das Prinzip im vorliegenden Fall genau eine Lösung besitzt.

**8. Verallgemeinerung.** Die *Onsager*sche Theorie ist nur solange sinnvoll, als der Zusammenhang zwischen den Kräften $X_k^i$ und den Geschwindigkeiten $\dot{x}_k$ die lineare Gestalt (5.2) hat. Im Gegensatz hierzu behalten die eben besprochenen Extremalprinzipien auch für allgemeinere Zusammenhänge zwischen den Kräften und den Geschwindigkeiten ihren Sinn. Es liegt daher nahe, diese Prinzipien als Verallgemeinerungen der *Onsager*schen Theorie zu betrachten und nach den Einschränkungen zu fragen, welche sie den möglichen Zusammenhängen zwischen den $X_k^i$ und den $\dot{x}_k$ auferlegen.

Zu diesem Zweck seien Systeme betrachtet, in denen die $X_k^i$ wiederum bloß von den $\dot{x}_k$ abhängen. Ferner sei angenommen, daß die Dissipationsfunktion $D(\dot{x}_k)$, die jetzt nicht mehr quadratisch zu sein braucht, aber nach wie vor keine negativen Werte annehmen darf, glatt sei. Da man die praktisch zu erwartenden Funktionen $D(\dot{x}_k)$ wohl mit genügender Genauigkeit durch glatte Funktionen annähern kann, bedeutet diese letzte Annahme keine wesentliche Einschränkung.

Geht man jetzt vom Prinzip in Abschnitt **6** aus, so kann man die Beziehungen (6.2) bis (6.5) übernehmen. Statt (6.7) hat man unter Berücksichtigung von (6.3)

$$L^i = B\, v_k\, \dot{x}_k = B\, \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = D\,, \tag{8.1}$$

mithin

$$B\, \lambda = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D \tag{8.2}$$

und daher, da nach (6.5)

$$X_k^i = B\, v_k = B\, \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \tag{8.3}$$

ist,

$$X_k^i = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}\,. \tag{8.4}$$

Das ist die vom Verfasser in einer früheren Arbeit[1] vorgeschlagene und dort durch eine semistatistische Betrachtung begründete Beziehung, welche auch im allgemeineren Fall die Orthogonalität des Vektors $X_k^i$ auf der Fläche $D = \text{const}$ statuiert.

In ähnlicher Weise kann man vom Prinzip in Abschnitt **7** ausgehen und die Beziehungen (7.1) bis (7.5) übernehmen. Statt (7.6) kommt jetzt mit Rücksicht auf (7.2)

$$L^i = X_k^i\, \dot{x}_k = \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = D\,, \tag{8.5}$$

mithin

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D \tag{8.6}$$

und daher nach (7.5) wiederum (8.4). Die beiden Extremalprinzipien sind also auch in diesem allgemeineren Fall äquivalent. Im übrigen prüft man leicht nach, daß (8.4) mit der Dissipationsfunktion (5.4), d. h. mit (6.6) auf (5.5) zurückführt.

**9. Bemerkungen.** Es ist klar, daß die Verallgemeinerung der Prinzipien vom kleinsten Kraftbetrag und von der größten Dissipationsleistung auf nichtlineare Zusammenhänge zwischen den $X_k^i$ und den $\dot{x}_k$, wie sie im letzten Abschnitt vorgeschlagen worden ist, rein hypothetischen Charakter hat. Immerhin sind aber die Beziehungen (8.4), wie bereits bemerkt wurde, ursprünglich auf ganz anderem Wege gewonnen worden und ruhen damit auf zwei verschiedenen Stützen. Ferner darf darauf hingewiesen werden, daß insbesondere das Prinzip von Abschnitt **7** vom physikalischen Standpunkt aus recht suggestiv erscheint: wenn nach dem zweiten Hauptsatz jedes abgeschlossene System dem Zustand maximaler Entropie zustrebt, so erscheint die Annahme nicht unvernünftig, daß ein System unter gegebenen Kräften $X_k^i$ seinen Zustand derart ändere, daß in seinem Inneren in jedem Augenblick ein Maximum an Entropie produziert wird. Gerade dies ist aber nach (3.4) der Inhalt des Prinzips von der größten Dissipationsleistung.

Schließlich darf wohl überhaupt nicht erwartet werden, daß eine Aussage über den Ablauf irreversibler Prozesse ohne Verwendung gewisser plausibler Annahmen zu formulieren sei, nachdem schon die statistische Begründung der *Onsager*schen Theorie, wie *H. B. G. Casimir*[2] nachgewiesen hat, von solchen Zusatzvoraussetzungen Gebrauch machen muß.

[1] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 9b (1958) S. 748.
[2] *H. B. G. Casimir*, a. a. O.

Man mag freilich einwenden, daß die *Onsager*schen Relationen in besonderen Fällen nicht in der einfachen Gestalt (5.3) formuliert werden, sondern gelegentlich in der Form

$$a_{jk}(b_i) = a_{kj}(-b_i)\,, \tag{9.1}$$

oder

$$a_{jk} = -a_{kj}\,. \tag{9.2}$$

Die Gestalt (9.1) bezieht sich auf Systeme mit gyroskopischen Kräften[1], die bekanntlich keine Arbeit leisten und daher nicht in (2.1) eingehen. Sie treten zum Beispiel in einem Magnetfeld der Feldstärke $b_i$ in Form der Lorentzkräfte oder als Corioliskräfte in einem mit der Winkelgeschwindigkeit $b_i$ rotierenden Koordinatensystem auf[2]. Die Gestalt (9.2) dagegen ergibt sich dann, wenn gewisse verallgemeinerte Kräfte und Geschwindigkeiten miteinander vertauscht werden[3]. Wenn man aber, wie das hier getan wurde und auf Grund der Analogie mit der analytischen Mechanik vernünftig erscheint, die Theorie auf dem fundamentalen Ausdruck (2.1) für die Elementararbeit aufbaut, der für jeden Satz von Lagekoordinaten die zugehörigen verallgemeinerten Kräfte definiert, dann ist eine solche Vertauschung und damit die Form (9.2) der *Onsager*schen Beziehungen im Vornherein ausgeschlossen. Was ferner die Relationen (9.1) anbelangt, so besteht noch immer die Möglichkeit, daß

$$a_{kj}(-b_i) = a_{kj}(b_i) \tag{9.3}$$

ist, so daß die *Onsager*schen Beziehungen in ihrer normalen Form (5.3) gültig bleiben. Es ist aber auch denkbar, daß die Gültigkeit der Extremalprinzipien von Abschnitt **6** und **7** auf nichtgyroskopische Systeme beschränkt ist.

(Eingegangen am 19. Oktober 1960.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Hans Ziegler*, Rüschlikon (Schweiz) Weiherweg 6

[1] Vgl. *H. Ziegler*, On the Concept of Elastic Stability, in *H. L. Dryden* und *Th. v. Kármán*, Advances in Applied Mechanics, 4, S. 368, New York 1956.
[2] Vgl. *S. R. de Groot*, a. a. O., S. 8.
[3] Vgl. *S. R. de Groot*, a. a. O., S. 216.

# Der Spannungszustand in einem geschichteten Körper bei axialsymmetrischer Belastung

Von **Hans Bufler**

**1. Einleitung.** In einer kürzlich erschienenen Arbeit des Verfassers[1] wurde der ebene Spannungs- bzw. Formänderungszustand in einer geschichteten Scheibe bei gegebener Randbelastung oder Randverschiebung untersucht. Hier soll das entsprechende axialsymmetrische Problem behandelt werden, wobei als Schichten lauter unendlich ausgedehnte, homogene und isotrop-elastische Platten mit beliebigen Dicken und beliebigen Elastizitätskonstanten zugrundegelegt werden. Wie früher unterscheidet man auch hier den Grenzfall vollkommener Haftung und den Grenzfall verschwindender Reibung zwischen den Schichten.

Das ebene Problem konnte mit Hilfe der Methode der Fourier-Transformation in übersichtlicher Weise behandelt werden, wobei sich sogar die Einführung einer Spannungs- oder Verschiebungsfunktion erübrigte. Die axialsymmetrische Aufgabe wird im folgenden mittels der *Hankel*-Transformation nullter und erster Ordnung durchgeführt. Für die bei der Formulierung der Übergangsbedingungen benötigten Transformierten der Randspannungen und Randverschiebungen ergeben sich hierbei Ausdrücke, die jenen beim ebenen Problem völlig analog aind. Dadurch ist es möglich, einen großen Teil der bei der geschichteten Scheibe gewonnenen Ergebnisse direkt zu übernehmen.

**2. Mathematische Vorbemerkungen.** Die in Zylinderkoordinaten dargestellte Bipotentialgleichung (für die Lovesche Verschiebungsfunktion) wird bei Axialsymmetrie mittels der *Hankel*-Transformation nullter Ordnung in eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten übergeführt, deren Lösung an die an beiden Rändern einer unendlich ausgedehnten Platte vorgeschriebenen Randbedingungen angepaßt werden kann. Darin liegt gerade der Vorteil dieser Methode.

Im folgenden werden die anschließend benötigten Formeln aus der Theorie der *Hankel*-Transformation zusammengestellt.

Wenn das Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ absolut konvergiert, und wenn die Funktion $f(x)$ in der Nachbarschaft des Punktes $x$ von beschränkter Schwankung ist, dann gilt[2] für $n \geqq -1/2$

$$f(r) = \int_0^\infty (\lambda r)^{1/2} I_n(\lambda r)\,d\lambda \int_0^\infty (\lambda x)^{1/2} f(x)\, I_n(\lambda x)\,dx\,.$$

An einer Sprungstelle erhält man statt $f(r)$ den Wert $\frac{1}{2}[f(r+0) + f(r-0)]$. In vorstehender Formel bedeutet $I_n$ die Besselsche Funktion erster Art und $n$-ter Ordnung. Ersetzt man $f(r)$ durch $r^{1/2} f(r)$ und $f(x)$ durch $x^{1/2} f(x)$, dann folgt

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda\, I_n(\lambda r)\,d\lambda \int_0^\infty x f(x)\, I_n(\lambda x)\,dx\,. \tag{1*}$$

Die *Hankel*-Transformation $n$-ter Ordnung der Funktion $f(x)$ [oder $f(r)$] ist definiert durch

$$\overset{n-}{f}(\lambda) = \int_0^\infty x f(x)\, I_n(\lambda x)\,dx = \int_0^\infty r f(r)\, I_n(\lambda r)\,dr\,. \tag{2*}$$

In Verbindung mit (1*) ergibt sich für die inverse Transformierte

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda \overset{n-}{f}(\lambda)\, I_n(\lambda r)\,d\lambda\,. \tag{3*}$$

---

[1] *H. Bufler*, Z. angew. Math. Mech. 41 (1961) S. 158

[2] *I. N. Sneddon*, Fouriertransforms. S. 52. New York-Toronto-London 1951.

In den in Ziff. 3 vorkommenden Funktionen (Spannungs- und Verschiebungskomponenten) wird die *Hankel*-Transformation nullter und erster Ordnung benötigt. Schreibt man dafür einfacher $\overset{0-}{f} \equiv \bar{f}$ und $\overset{1-}{f} \equiv \bar{\bar{f}}$, so erhält man gemäß (2*) und (3*)

$$\bar{f}(\lambda) = \int_0^\infty r\, f(r)\, I_0(\lambda r)\, dr \quad \text{bzw.} \quad \bar{\bar{f}}(\lambda) = \int_0^\infty r\, f(r)\, I_1(\lambda r)\, dr \tag{4*}$$

und

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda\, \bar{f}(\lambda)\, I_0(\lambda r)\, d\lambda \quad \text{bzw.} \quad f(r) = \int_0^\infty \lambda\, \bar{\bar{f}}(\lambda)\, I_1(\lambda r)\, d\lambda\,. \tag{5*}$$

Für die Transformierten der Funktionen $\dot{f}(r) \equiv df/dr$ und

$$\Delta f(r, y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(r, y)$$

gelten folgende Beziehungen[1]:

$$\bar{\dot{f}}(\lambda) = -\lambda\, \bar{f}(\lambda) \tag{6*}$$

(Voraussetzung: $r\, f(r) = 0$ für $r = 0$ und $r = \infty$),

$$\overline{\Delta f}(\lambda, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda^2\right) \bar{f}(\lambda, y) \tag{7*}$$

(weitere Voraussetzung: $r\, \dot{f}(r) = 0$ für $r = 0$ und $r = \infty$). Zweimalige Anwendung von (7*) liefert

$$\overline{\Delta \Delta f}(\lambda, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda^2\right)^2 \bar{f}(\lambda, y)\,. \tag{8*}$$

Ersetzt man in (6*) $f$ durch $\Delta f$, so folgt in Verbindung mit (7*)

$$\overline{\dot{\Delta f}}(\lambda, y) = -\lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda^2\right) \bar{f}(\lambda, y)\,. \tag{9*}$$

**3. Spannungs- und Verschiebungszustand einer beidseitig axialsymmetrisch belasteten Platte.** Im folgenden soll der Spannungs- und Verschiebungszustand einer unendlich ausgedehnten Platte (Schicht) der Dicke $h$ bei gegebenen (normal und tangential gerichteten, axialsymmetrisch verteilten) Randlasten bestimmt werden (Abb. 1).

Radialverschiebung $u$, Axialverschiebung $v$, Schubspannung $\tau \equiv \tau_{ry}$, Axialspannung $\sigma_y$, Radialspannung $\sigma_r$ und Ringspannung $\sigma_\varphi$ lassen sich wie folgt durch die Lovesche Verschiebungsfunktion $\Phi$, welche der Bipotentialgleichung

$$\Delta \Delta \Phi(r, y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \Phi(r, y) = 0 \tag{1}$$

genügen muß, ausdrücken[2]:

$$\frac{E}{1+\nu}\, u(r, y) = -\frac{\partial^2 \Phi(r, y)}{\partial r\, \partial y}\,, \tag{2}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\, v(r, y) = -\frac{\partial^2 \Phi(r, y)}{\partial y^2} + 2\,(1-\nu)\, \Delta \Phi(r, y)\,, \tag{3}$$

$$\tau(r, y) = \frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\partial^2 \Phi(r, y)}{\partial y^2} + (1-\nu)\, \Delta \Phi(r, y)\right], \tag{4}$$

$$\sigma_y(r, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial^2 \Phi(r, y)}{\partial y^2} + (2-\nu)\, \Delta \Phi(r, y)\right], \tag{5}$$

$$\sigma_r(r, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial^2 \Phi(r, y)}{\partial r^2} + \nu\, \Delta \Phi(r, y)\right] \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi(r, y)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi(r, y)}{\partial y^2} - (1-\nu)\, \Delta \Phi(r, y)\right], \tag{6}$$

$$\sigma_\varphi(r, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi(r, y)}{\partial r} + \nu\, \Delta \Phi(r, y)\right]. \tag{7}$$

Hierin bedeutet $E$ den Elastizitätsmodul und $\nu$ die Querdehnzahl der Platte.

[1] S. Fußnote 2 von Seite 417, dort S. 62.

[2] S. z. B. *K. Marguerre*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955) Seite 242 [dort Gl. (2́9) und (3́0)].

Wendet man auf (1) die *Hankel*-Transformation nullter Ordnung an[1], so folgt wegen (8*) die gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(D^2 - \lambda^2)^2 \, \bar{\Phi}(\lambda, y) = 0 \,, \tag{1'}$$

wobei $D$ den Operator $D \equiv \partial/\partial y$ bedeutet. Ihre Lösung lautet[2] mit $A^*(\lambda)$, $B^*(\lambda)$, $C^*(\lambda)$, $D^*(\lambda)$ als „Integrationskonstanten“[3]

$$\bar{\Phi}(\lambda, y) = A^*(\lambda) \operatorname{Cof} |\lambda| y + B^*(\lambda) \operatorname{Sin} |\lambda| y + C^*(\lambda) |\lambda| y \operatorname{Cof} |\lambda| y + D^*(\lambda) |\lambda| y \operatorname{Sin} |\lambda| y. \tag{1''}$$

Führt man nun mit (2) und (4) die *Hankel*-Transformation erster Ordnung, mit (3) und (5) diejenige nullter Ordnung aus, so lassen sich die rechten Seiten dieser Gleichungen wegen (6*), (9*) und (4*), (7*) durch die auf Grund von (1'') als bekannt anzusehende Funktion $\bar{\Phi}(\lambda, y)$ ausdrücken (die Ableitung nach $y$ wird von der Transformation nicht berührt):

$$\frac{E}{1+\nu} \bar{u}(\lambda, y) = \lambda \, D \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \,, \tag{2'}$$

$$\frac{E}{1+\nu} \bar{v}(\lambda, y) = [(1 - 2\nu) \, D^2 - 2 (1 - \nu) \lambda^2] \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \,, \tag{3'}$$

$$\bar{\tau}(\lambda, y) = \lambda \, [\nu \, D^2 + (1 - \nu) \lambda^2] \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \,, \tag{4'}$$

$$\bar{\sigma}_y(\lambda, y) = [(1 - \nu) \, D^3 - (2 - \nu) \lambda^2 \, D] \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \,. \tag{5'}$$

Das gleiche Vorgehen führt indessen bei den Gleichungen (6) und (7) nicht zum Ziel. Vielmehr hat man dort auf den Ausdruck $\partial\Phi/\partial r \equiv \dot{\Phi}$ gemäß (6*) die Transformation erster Ordnung, auf die Ausdrücke $\Phi$ und $\Delta\Phi$ gemäß (4*) und (7*) die Transformation nullter Ordnung anzuwenden. Man erhält dann (da die betreffenden Terme sofort wieder rücktransformiert werden müssen)

$$\sigma_r(r, y) = -\frac{1}{r} \int_0^\infty \lambda^2 \, D \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \, I_1(\lambda r) \, d\lambda + \int_0^\infty \lambda \, [\nu D^3 + (1 - \nu) \lambda^2 D] \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \, I_0(\lambda r) \, d\lambda \,, \tag{6'}$$

$$\sigma_\varphi(r, y) = \frac{1}{r} \int_0^\infty \lambda^2 \, D \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \, I_1(\lambda r) \, d\lambda + \nu \int_0^\infty \lambda \, [D^3 - \lambda^2 D] \, \bar{\Phi}(\lambda, y) \, I_0(\lambda r) \, d\lambda \,. \tag{7'}$$

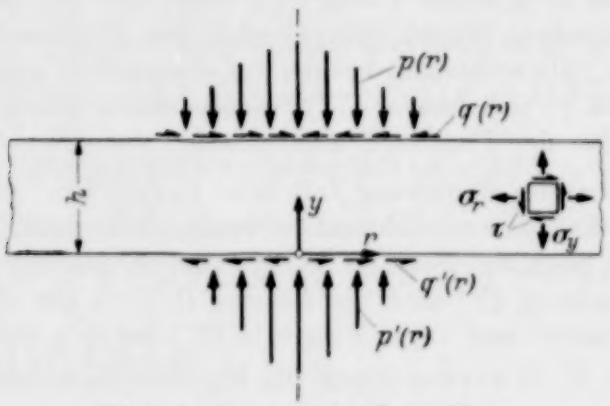



Abb. 1. Axialsymmetrisch belastete Platte.

Führt man statt der zunächst noch willkürlichen „Konstanten“ $A^*$, $B^*$, $C^*$, $D^*$ in (1'') die „Konstanten“ $A$, $B$, $C$, $D$ gemäß

$$\left.\begin{matrix} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{\lambda^3} \left\{\begin{matrix} [B + (1 - 2\nu) \, C] \,, \\ [A + (1 - 2\nu) \, D] \,, \\ D \,, \\ C \end{matrix}\right.$$

[1] Die Anwendung der Hankel-Transformation zur Lösung des axialsymmetrischen Problems einer unendlich ausgedehnten Platte geht auf I. N. Snedden zurück (s. Fußnote 2 der Seite 417).

[2] Da bei der Rücktransformation gemäß (5*) nur über $0 \leqq \lambda \leqq \infty$ integriert wird, kann man (im Gegensatz zum ebenen Problem) in (1'') (und damit auch sonst) auf die Absolutstriche bei $\lambda$ verzichten.

[3] Diese sind lediglich in bezug auf $y$ Konstanten.

ein, was ohne weiteres zulässig ist, so gehen damit die Ausdrücke (2′) bis (7′) über in

$$\bar{\bar{u}}(\lambda, y) = -\frac{1+\nu}{E\lambda}\{[A+2(1-\nu)D]\mathfrak{Cof}\,\lambda y+[B+2(1-\nu)C]\mathfrak{Sin}\lambda y+C\lambda y\mathfrak{Cof}\,\lambda y+D\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}, \quad (2'')$$

$$\bar{v}(\lambda, y) = \frac{1+\nu}{E\lambda}\{[B-(1-2\nu)C]\mathfrak{Cof}\,\lambda y+[A-(1-2\nu)D]\mathfrak{Sin}\,\lambda y+D\lambda y\mathfrak{Cof}\,\lambda y+C\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}, \quad (3'')$$

$$\bar{\bar{\tau}}(\lambda, y) = -[(B+C)\mathfrak{Cof}\,\lambda y+(A+D)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y+D\lambda y\mathfrak{Cof}\,\lambda y+C\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y], \quad (4'')$$

$$\bar{\sigma}_y(\lambda, y) = A\mathfrak{Cof}\,\lambda y+B\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y+C\lambda y\mathfrak{Cof}\,\lambda y+D\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y, \quad (5'')$$

$$\sigma_r(r, y) = \frac{1}{r}\int_0^\infty \{[A+2(1-\nu)D]\mathfrak{Cof}\,\lambda y+[B+2(1-\nu)C]\mathfrak{Sin}\lambda y+C\lambda y\mathfrak{Cof}\,\lambda y+D\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}\, I_1(\lambda r)\, d\lambda$$

$$-\int_0^\infty \lambda\,[(A+2D)\mathfrak{Cof}\,\lambda y+(B+2C)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y+C\lambda y\mathfrak{Cof}\,\lambda y+D\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y]\, I_0(\lambda r)\, d\lambda, \quad (6'')$$

$$\sigma_\varphi(r, y) = -\frac{1}{r}\int_0^\infty \{[A+2(1-\nu)D]\mathfrak{Cof}\,\lambda y+[B+2(1-\nu)C]\mathfrak{Sin}\lambda y+C\lambda y\mathfrak{Cof}\,\lambda y+D\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}$$

$$\times I_1(\lambda r)\, d\lambda - 2\nu\int_0^\infty \lambda\,(D\mathfrak{Cof}\,\lambda y+C\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y)\, I_0(\lambda r)\, d\lambda. \quad (7'')$$

Die Formeln (3″) und (5″) stimmen völlig mit jenen des ebenen Problems (ebener Formänderungszustand) überein, wenn man dort[1] die Fourier-Transformierten durch die *Hankel*-Transformierten nullter Ordnung ersetzt und die hier überflüssigen Absolutstriche bei $\lambda$ wegläßt[2]. Ebenso erhält man Übereinstimmung der Ausdrücke (2″) und (4″) mit den entsprechenden des ebenen Falles, wenn man dort[3] die mit $i$ $(i=\sqrt{-1})$ dividierten Fourier-Transformierten durch die *Hankel*-Transformierten erster Ordnung ersetzt und die Absolutstriche bei $\lambda$ streicht[2].

Dieser Befund ist nicht überraschend; wie *K. Marguerre* gezeigt hat[4], läßt sich nämlich auch beim ebenen Problem eine Verschiebungsfunktion $\Phi$ einführen, die der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\Phi=0$ (hier natürlich mit $\Delta\equiv\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$) genügt und aus der sich die Verschiebungen $u(x, y)$, $v(x, y)$ und die Spannungen $\tau(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ nach den gleichen Vorschriften (2), (3), (4), (5) (mit $r=x$) errechnen lassen. Da außerdem bei der im ebenen Fall anzuwendenden *Fourier*-Transformation die Funktion $\Delta f(x, y)$ sich analog (7*) transformiert, gelangt man dort zu den gleichen Ausdrücken (3′) und (5′). Bei der *Fourier*-Transformation von (2) und (4) erhält man wegen der dabei anstelle von (6*) geltenden Beziehung $\bar{f}'(\lambda)=-i\lambda\bar{f}(\lambda)$ $(i=\sqrt{-1})$ Formeln, die sich von (2′) und (4′) lediglich durch die auf den rechten Gleichungsseiten hinzutretende imaginäre Einheit $i$ unterscheiden. Ferner führt auch die *Fourier*-Transformation der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\Phi(x, y)=0$ auf die Differentialgleichung (1′) und die Lösung (1″), in der allerdings die Absolutstriche bei $\lambda$ beibehalten werden müssen[5] und folglich auch in (2″) bis (6″) auftreten.

Die „Konstanten“ $A$, $B$, $C$, $D$ werden durch die Randbedingungen (Abb. 1)

$$\tau(r, 0) = -q'(r), \qquad \tau(r, h) = -q(r),$$

$$\sigma_y(r, 0) = -p'(r), \qquad \sigma_y(r, h) = -p(r)$$

festgelegt. Geht man zu den transformierten Spannungen $\bar{\bar{\tau}}$ und $\bar{\sigma}_y$ über, so lauten diese

$$\bar{\bar{\tau}}(\lambda, 0) = -\bar{\bar{q}}'(\lambda), \qquad \bar{\bar{\tau}}(\lambda, h) = -\bar{\bar{q}}(\lambda),$$

$$\bar{\sigma}_y(\lambda, 0) = -\bar{p}'(\lambda), \qquad \bar{\sigma}_y(\lambda, h) = -\bar{p}(\lambda)$$

[1] S. meine in Fußnote 1 von Seite 417 zitierte Arbeit, dort Gl. (18) und (14) bei Berücksichtigung von (13).
[2] S. Fußnote 2 von Seite 419.
[3] in meiner zitierten Arbeit Gl. (17) und (15) bei Berücksichtigung von (13).
[4] *K. Marguerre*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 332.
[5] Dieses ist beim ebenen Problem erforderlich, da bei der (komplexen) Fourierschen Rücktransformation über $-\infty \leqq \lambda \leqq +\infty$ integriert wird.

und liefern mit (4″) und (5″) und den Abkürzungen $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{Sin}\,\lambda h$, $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{Cof}\,\lambda h$

$$A = -\,\bar{p}'(\lambda)\,,$$

$$B = \bar{q}'(\lambda) - C\,,$$

$$C = \frac{-(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}'(\lambda) + (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p}(\lambda) + \mathfrak{S}^2\,\bar{q}'(\lambda) + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}(\lambda)}{\mathfrak{S}^2 - (\lambda h)^2}\,,$$

$$D = \frac{\mathfrak{S}^2\,\bar{p}'(\lambda) - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p}(\lambda) + (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}'(\lambda) - (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}(\lambda)}{\mathfrak{S}^2 - (\lambda h)^2}\,.$$

Damit erhält man für die Transformierten der Spannungs- und Verschiebungskomponenten gemäß (2″) bis (7″)

$$\begin{aligned}\frac{E\lambda}{1+\nu}\,\bar{u}(\lambda, y) = \frac{1}{\mathfrak{S}^2-(\lambda h)^2}\,\{&[-\langle(1-2\nu)\,\mathfrak{S}^2 + (\lambda h)^2\rangle\,\bar{p}' + 2\,(1-\nu)\,\lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p}\\ &- 2\,(1-\nu)\,(\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' + 2\,(1-\nu)\,(\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [(1-2\nu)\,(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' - (1-2\nu)\,(\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p}\\ &+ \langle(\lambda h)^2 - 2\,(1-\nu)\,\mathfrak{S}^2\rangle\,\bar{q}' - (1-2\nu)\,\lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\\ &+ [(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} - \mathfrak{S}^2\,\bar{q}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [-\mathfrak{S}^2\,\bar{p}' + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} - (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' + (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}\,, \quad (2''')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{E\lambda}{1+\nu}\,\bar{v}(\lambda, y) = \frac{1}{\mathfrak{S}^2-(\lambda h)^2}\,\{&[2\,(1-\nu)\,(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' - 2\,(1-\nu)\,(\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p}\\ &- \langle(1-2\nu)\,\mathfrak{S}^2 + (\lambda h)^2\rangle\,\bar{q}' - 2\,(1-\nu)\,\lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [\langle(\lambda h)^2 - 2\,(1-\nu)\,\mathfrak{S}^2\rangle\,\bar{p}' + (1-2\nu)\,\lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p}\\ &- (1-2\nu)\,(\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' + (1-2\nu)\,(\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\\ &+ [\mathfrak{S}^2\,\bar{p}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} + (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [-(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' + (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} + \mathfrak{S}^2\,\bar{q}' + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}\,, \quad (3''')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}(\lambda, y) = -\frac{1}{\mathfrak{S}^2-(\lambda h)^2}\,\{&[(\lambda h)^2\,\bar{p}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} + (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + [\mathfrak{S}^2 - (\lambda h)^2]\,\bar{q}'\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [-(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' + (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} + \mathfrak{S}^2\,\bar{q}' + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\\ &+ [\mathfrak{S}^2\,\bar{p}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} + (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\}\,, \quad (4''')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y(\lambda, y) = -\frac{1}{\mathfrak{S}^2-(\lambda h)^2}\,\{&[\mathfrak{S}^2 - (\lambda h)^2]\,\bar{p}'\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y - [(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} - (\lambda h)^2\,\bar{q}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\\ &+ [(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} - \mathfrak{S}^2\,\bar{q}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [-\mathfrak{S}^2\,\bar{p}' + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} - (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' + (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}\,, \quad (5''')\end{aligned}$$

$$\sigma_r(r, y) = -\frac{1}{r}\int_0^\infty \left[\frac{E\lambda}{1+\nu}\,\bar{u}(\lambda y)\right] I_1(\lambda r)\,d\lambda$$

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty \frac{\lambda}{\mathfrak{S}^2-(\lambda h)^2}\,\{&[\langle\mathfrak{S}^2 + (\lambda h)^2\rangle\,\bar{p}' - 2\,\lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} + 2\,(\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' - 2\,(\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [-(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' + (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} + \langle 2\,\mathfrak{S}^2 - (\lambda h)^2\rangle\,\bar{q}' + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\\ &+ [-(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' + (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} + \mathfrak{S}^2\,\bar{q}' + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [\mathfrak{S}^2\,\bar{p}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} + (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\lambda y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}\,I_0(\lambda r)\,d\lambda\,, \quad (6''')\end{aligned}$$

$$\sigma_\varphi(r, y) = \frac{1}{r}\int_0^\infty \left[\frac{E\lambda}{1+\nu}\,\bar{u}(\lambda, y)\right] I_1(\lambda r)\,d\lambda$$

$$\begin{aligned}-2\nu\int_0^\infty \frac{\lambda}{\mathfrak{S}^2-(\lambda h)^2}\,\{&[\mathfrak{S}^2\,\bar{p}' - \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{p} + (\lambda h - \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{q}' - (\lambda h\,\mathfrak{C} - \mathfrak{S})\,\bar{q}]\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y\\ &+ [-(\lambda h + \mathfrak{S}\,\mathfrak{C})\,\bar{p}' + (\lambda h\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\bar{p} + \mathfrak{S}^2\,\bar{q}' + \lambda h\,\mathfrak{S}\,\bar{q}]\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y\}\,I_0(\lambda r)\,d\lambda\,. \quad (7''')\end{aligned}$$

Die transformierten Randspannungen sind gemäß (4*) zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix} \bar{p}(\lambda) \\ \bar{p}'(r) \end{matrix}\right\} &= \int_0^\infty r \left\{\begin{matrix} p(r) \\ p'(r) \end{matrix}\right\} I_0(\lambda\, r)\, dr\,, \\ \left.\begin{matrix} \bar{\bar{q}}(\lambda) \\ \bar{\bar{q}}'(\lambda) \end{matrix}\right\} &= \int_0^\infty r \left\{\begin{matrix} q(r) \\ q'(r) \end{matrix}\right\} I_1(\lambda\, r)\, dr\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Aus den transformierten Verschiebungen und Spannungen (2‴) bis (5‴) erhält man die wirklichen mittels Rücktransformation entsprechend (5*):

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix} v(r,y) \\ \sigma_y(r,y) \end{matrix}\right\} &= \int_0^\infty \lambda \left\{\begin{matrix} \bar{v}(\lambda,y) \\ \bar{\sigma}_y(\lambda,y) \end{matrix}\right\} I_0(\lambda\, r)\, d\lambda\,, \\ \left.\begin{matrix} u(r,y) \\ \tau(r,y) \end{matrix}\right\} &= \int_0^\infty \lambda \left\{\begin{matrix} \bar{\bar{u}}(\lambda,y) \\ \bar{\bar{\tau}}(\lambda,y) \end{matrix}\right\} I_1(\lambda\, r)\, d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Abb. 2. Der axialsymmetrisch belastete Halbraum.

Im besonderen gelten für die Spannungen im Halbraum die aus (4‴) bis (7‴) mit $y = h - \eta$ und $h \to \infty$ (Abb. 2) folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \tau(r,\eta) &= -\int_0^\infty \lambda\, [-\lambda\,\eta\, \bar{p}(\lambda) + (1-\lambda\,\eta)\, \bar{\bar{q}}(\lambda)]\, e^{-\lambda\eta}\, I_1(\lambda\, r)\, d\lambda\,, \\ \sigma_y(r,\eta) &= -\int_0^\infty \lambda\, [(1+\lambda\,\eta)\, \bar{p}(\lambda) + \lambda\,\eta\, \bar{\bar{q}}(\lambda)]\, e^{-\lambda\eta}\, I_0(\lambda\, r)\, d\lambda\,, \\ \sigma_r(r,\eta) &= \frac{1}{r}\int_0^\infty \{(1-2\,\nu-\lambda\,\eta)\, \bar{p}(\lambda) + [2\,(1-\nu)-\lambda\,\eta]\, \bar{\bar{q}}(\lambda)\}\, e^{-\lambda\eta}\, I_1(\lambda\, r)\, d\lambda \\ &\quad -\int_0^\infty \lambda\, [(1-\lambda\,\eta)\, \bar{p}(\lambda) + (2-\lambda\,\eta)\, \bar{\bar{q}}(\lambda)]\, e^{-\lambda\eta}\, I_0(\lambda\, r)\, d\lambda\,, \\ \sigma_\varphi(r,\eta) &= -\frac{1}{r}\int_0^\infty \{(1-2\,\nu-\lambda\,\eta)\, \bar{p}(\lambda) + [2\,(1-\nu)-\lambda\,\eta]\, \bar{\bar{q}}(\lambda)\}\, e^{-\lambda\eta}\, I_1(\lambda\, r)\, d\lambda \\ &\quad -2\,\nu\int_0^\infty \lambda\, [\bar{p}(\lambda) + \bar{\bar{q}}(\lambda)]\, e^{-\lambda\eta}\, I_0(\lambda\, r)\, d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Liegt im Intervall $0 \leqq r \leqq a$ eine gleichmäßig verteilte Druckverteilung $p_0$ vor, so bekommt man mit dem Integral

$$\int_0^a r\, I_0(\lambda\, r)\, dr = \frac{a}{\lambda}\, I_1(\lambda\, a)$$

für die transformierte Belastung

$$\bar{p}_0(\lambda) = p_0 \int_0^a r\, I_0(\lambda\, r)\, dr = \frac{a^2\,\pi\, p_0}{\pi}\,\frac{J_1(\lambda\, a)}{\lambda\, a}\,.$$

Geht man schließlich mit $a \to 0$ zu einer Einzelkraft $P_0 = \lim\limits_{\substack{a\to 0\\ p_0\to\infty}} (a^2\,\pi\, p_0)$ über, dann ergibt sich wegen $\lim\limits_{a\to 0}\left[\frac{J_1(\lambda\, a)}{\lambda\, a}\right] = \frac{1}{2}$

$$\bar{p}_0(\lambda) = \frac{P_0}{2\,\pi} \tag{11}$$

und damit, wenn man außerdem von einer Randschubspannung absieht [$\bar{\bar{q}}(\lambda) = 0$], das wohlbekannte Ergebnis[1]

$$\left.\begin{aligned}
\tau(r,\eta) &= \frac{3}{2\,\pi}\, P_0\,\frac{\eta^2\, r}{R^5} \qquad \left(R = \sqrt{r^2+\eta^2}\right),\\
\sigma_y(r,\eta) &= -\frac{3}{2\,\pi}\, P_0\,\frac{\eta^3}{R^5}\,,\\
\sigma_r(r,\eta) &= -\frac{1}{2\,\pi}\, P_0\left[3\,\frac{\eta\, r^2}{R^5} - \frac{1-2\,\nu}{r^2}\left(1-\frac{\eta}{R}\right)\right],\\
\sigma_\varphi(r,\eta) &= -\frac{1-2\,\nu}{2\,\pi}\, P_0\left[\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\eta}{R}\right) - \frac{\eta}{R^3}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Hierbei wurden die Integrale

$$\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\,\eta}\, I_0(\lambda\, r)\, d\lambda = \frac{\eta}{R^3}\,, \qquad \int_0^\infty \lambda^2\, e^{-\lambda\,\eta}\, I_0(\lambda\, r)\, d\lambda = \frac{2\,\eta^2 - r^2}{R^5}\,,$$

$$\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\,\eta}\, I_1(\lambda\, r)\, d\lambda = \frac{r}{R^3}\,, \qquad \int_0^\infty \lambda^2\, e^{-\lambda\,\eta}\, I_1(\lambda\, r)\, d\lambda = 3\,\frac{\eta\, r}{R^5}\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\,\eta}\, I_1(\lambda\, r)\, d\lambda = \frac{1}{r}\left(1-\frac{\eta}{R}\right)$$

verwendet.

**4. Der geschichtete Körper im Falle vollkommener Haftung.** Die im folgenden anzustellenden Überlegungen sind jenen beim ebenen Problem völlig analog[2]. Im Falle vollkommener Haftung aller Schichten müssen die Berührbedingung

$$v_k(r, 0) = v_{k+1}(r, h_{k+1})$$

und die Häftbedingung

$$u_k(r, 0) = u_{k+1}(r, h_{k+1})$$

erfüllt werden (Abb. 3 und 4), wobei der Index $k$ zur Numerierung der einzelnen Schichten dient. Multipliziert man die erste der vorstehenden Gleichungen mit $r\, I_0(\lambda\, r)$, die zweite mit $r\, I_1(\lambda\, r)$ und integriert zwischen $r = 0$ und $r = \infty$, so erhält man wegen (4*)

$$\bar{v}_k(\lambda, 0) = \bar{v}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) \qquad \text{(Berührbedingung)}\,, \tag{13}$$

$$\bar{\bar{u}}_k(\lambda, 0) = \bar{\bar{u}}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) \qquad \text{(Haftbedingung)}\,. \tag{14}$$

---

[1] S. *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik 1. Bd. 2. Auflage, S. 118, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953;
[2] S. Fußnote 1 von Seite 417.

Nach (2‴) und (3‴) ist aber mit den jeweiligen Randspannungen $p_k$, $q_k$, $p_{k-1}$, $q_{k-1}$ bzw. $p_{k+1}$, $q_{k+1}$, $p_k$, $q_k$ (Abb. 4)[1]

$$\bar{\bar{u}}_k(\lambda, 0) = \frac{2(1-\nu_k^2)}{\lambda E_k \varepsilon_k}\left(-\gamma_k \bar{p}_k + \delta_k \bar{p}_{k-1} - \alpha_k^* \bar{\bar{q}}_k + \beta_k^* \bar{\bar{q}}_{k-1}\right), \tag{15}$$

$$\bar{v}_k(\lambda, 0) = \frac{2(1-\nu_k^2)}{\lambda E_k \varepsilon_k}\left(\alpha_k \bar{p}_k - \beta_k \bar{p}_{k-1} - \gamma_k \bar{\bar{q}}_k - \delta_k \bar{\bar{q}}_{k-1}\right), \tag{16}$$

$$\bar{\bar{u}}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) = \frac{2(1-\nu_{k+1}^2)}{\lambda E_{k+1} \varepsilon_{k+1}}\left(\delta_{k+1} \bar{p}_{k+1} - \gamma_{k+1} \bar{p}_k - \beta_{k+1}^* \bar{\bar{q}}_{k+1} + \alpha_{k+1}^* \bar{\bar{q}}_k\right), \tag{17}$$

$$\bar{v}_{k+1}(\lambda, h_{k+1}) = \frac{2(1-\nu_{k+1}^2)}{\lambda E_{k+1} \varepsilon_{k+1}}\left(\beta_{k+1} \bar{p}_{k+1} - \alpha_{k+1} \bar{p}_k - \delta_{k+1} \bar{\bar{q}}_{k+1} - \gamma_{k+1} \bar{\bar{q}}_k\right) \tag{18}$$

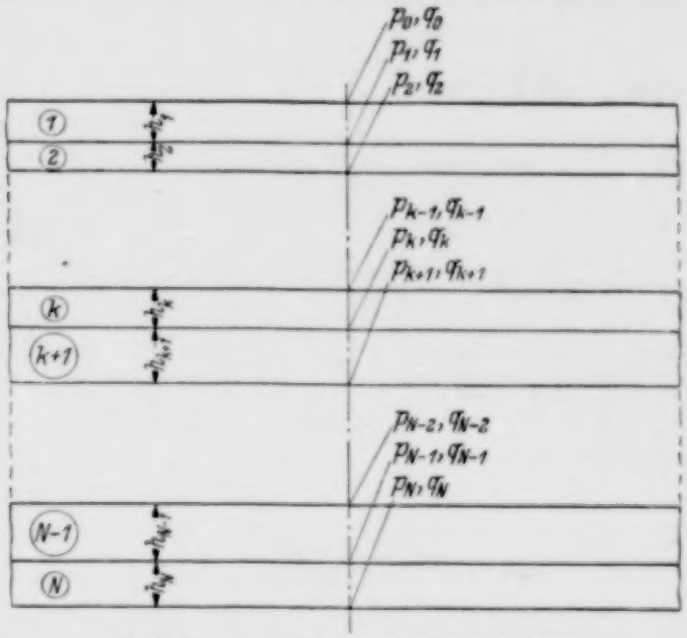



Abb. 3. Der aus $N$ Schichten bestehende Körper.

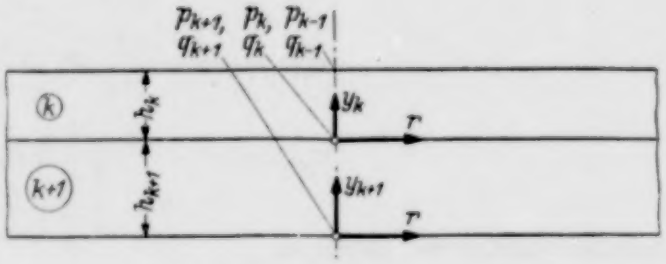



Abb. 4. Zur Herleitung der Berühr- und Haftbedingung.

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_k &= \lambda h_k + \mathfrak{Sin}\,\lambda h_k \mathfrak{Cos}\,\lambda h_k,\\
\alpha_k^* &= \lambda h_k - \mathfrak{Sin}\,\lambda h_k \mathfrak{Cos}\,\lambda h_k,\\
\beta_k &= \lambda h_k \mathfrak{Cos}\,\lambda h_k + \mathfrak{Sin}\,\lambda h_k,\\
\beta_k^* &= \lambda h_k \mathfrak{Cos}\,\lambda h_k - \mathfrak{Sin}\,\lambda h_k,\\
\delta_k &= \lambda h_k \mathfrak{Sin}\,\lambda h_k,\\
\varepsilon_k &= \mathfrak{Sin}^2 \lambda h_k - (\lambda h_k)^2,\\
\gamma_k &= \frac{(1-2\nu_k)\,\mathfrak{Sin}^2 \lambda h_k + (\lambda h_k)^2}{2(1-\nu_k)}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Damit lauten jetzt die Berühr- und Haftbedingung

$$\begin{aligned}
&\beta_{k+1} \bar{p}_{k+1} - (\alpha_{k+1} + \alpha_k \varphi_{k,k+1}) \bar{p}_k + \beta_k \varphi_{k,k+1} \bar{p}_{k-1}\\
&\quad - \delta_{k+1} \bar{\bar{q}}_{k+1} - (\gamma_{k+1} - \gamma_k \varphi_{k,k+1}) \bar{\bar{q}}_k + \delta_k \varphi_{k,k+1} \bar{\bar{q}}_{k-1} = 0 \quad \text{(Berührbedingung)},
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&\delta_{k+1} \bar{p}_{k+1} - (\gamma_{k+1} - \gamma_k \varphi_{k,k+1}) \bar{p}_k - \delta_k \varphi_{k,k+1} \bar{p}_{k-1}\\
&\quad - \beta_{k+1}^* \bar{\bar{q}}_{k+1} + (\alpha_{k+1}^* + \alpha_k^* \varphi_{k,k+1}) \bar{\bar{q}}_k - \beta_k^* \varphi_{k,k+1} \bar{\bar{q}}_{k-1} = 0 \quad \text{(Haftbedingung)},
\end{aligned} \tag{21}$$

wobei

$$\varphi_{k,k+1} = \frac{1-\nu_k^2}{1-\nu_{k+1}^2} \frac{E_{k+1}}{E_k} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \tag{22}$$

bedeutet.

[1] Diese Gleichungen gehen nach dem in Ziff. 3 Gesagten aus jenen des ebenen Problems (ebener Formänderungszustand) dadurch hervor, daß man dort die *Fourier*-Transformierten $\bar{p}$ und $\bar{v}$ durch die *Hankel*-Transformierten nullter Ordnung, dagegen die *Fourier*-Transformierten $\bar{q}$ und $\bar{u}$ durch die mit $i = \sqrt{-1}$ multiplizierten *Hankel*-Transformierten erster Ordnung ersetzt.

Die gekoppelten Differenzengleichungen (20), (21) können bei insgesamt $N$ Schichten je $(N-1)$ mal angeschrieben werden (nämlich für $k = 1, 2, \ldots, N-1$) und liefern somit die zur Bestimmung der Unbekannten $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_{N-1}; \bar{\bar{q}}_1, \bar{\bar{q}}_2, \ldots, \bar{\bar{q}}_{N-1}$ erforderlichen $2(N-1)$ Gleichungen. In diesem linearen Gleichungssystem sind die $\bar{p}_0, \bar{\bar{q}}_0$ und $\bar{p}_N, \bar{\bar{q}}_N$ bei gegebenen Randlasten als bekannt anzusehen. Sind statt der Randspannungen die Randverschiebungen vorgegeben (worauf hier nicht weiter eingegangen sei), so ist ebenso zu verfahren wie im ebenen Fall[1]. Nach Ermittlung der $\bar{p}_k$ und $\bar{\bar{q}}_k$ können der Spannungs- und Formänderungszustand in jeder Schicht gemäß $(2''')$ bis $(7''')$ bestimmt werden. Anschließend werden einige Spezialfälle betrachtet.

Abb. 5. Der Halbraum mit anschließender Schicht bei normaler Belastung.

a) Der homogene Halbraum. Der Halbraum bestehe aus lauter gleichen, aneinandergeklebten Schichten. Die Lösung der beiden Differenzengleichungen (20), (21), die in diesem Sonderfall konstante Koeffizienten erhalten ($\alpha_k = \alpha$, $\beta_k = \beta$, $\delta_k = \delta$, $\gamma_k = \gamma$, $\alpha_k^* = \alpha^*$, $\beta_k^* = \beta^*$, $\varphi_{k,k+1} = 1$), erfolgt genauso wie im ebenen Fall. Das Ergebnis lautet

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_k(\lambda) &= [(1+\lambda h k)\,\bar{p}_0(\lambda) + \lambda h k\,\bar{\bar{q}}_0(\lambda)]\,e^{-\lambda h k}, \\ \bar{\bar{q}}_k(\lambda) &= [-\lambda h k\,\bar{p}_0(\lambda) + (1-\lambda h k)\,\bar{\bar{q}}_0(\lambda)]\,e^{-\lambda h k}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Setzt man hierin $\bar{p}_k = -\bar{\sigma}_y$, $\bar{\bar{q}}_k = -\bar{\bar{\tau}}$ und $h k = \eta$, so bekommt man — wie es auch sein muß — nach dem Rücktransformieren Übereinstimmung mit den ersten beiden Formeln (10).

b) Der Halbraum mit aufgeklebter Schicht. Zugrundegelegt sei hier der in Abb. 5 dargestellte Verbundkörper bei normaler, axialsymmetrischer Randbelastung. Mit $h_2 \to \infty$ erhält man aus (19) für den Halbraum

$$\alpha_2 = -\alpha_2^* = \varepsilon_2 = \left.\frac{e^{2\lambda h_2}}{4}\right|_{h_2\to\infty},$$

$$\beta_2 = \beta_2^* = \delta_2 = \lambda h_2 \left.\frac{e^{\lambda h_2}}{2}\right|_{h_2\to\infty},$$

$$\gamma_2 = \left.\frac{1-2\nu_2}{8(1-\nu_2)}\,e^{2\lambda h_2}\right|_{h_2\to\infty}$$

und aus (22)

$$\varphi_{1,2} = \left.\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1}\,\frac{e^{2\lambda h_1}}{4\varepsilon_1}\right|_{h_2\to\infty}.$$

Hiermit lauten die Berühr- und Haftbedingung (20), (21) für $k = 1$ und $\bar{\bar{q}}_0 = 0$, wenn man den Grenzübergang $h_2 \to \infty$ durchführt,

$$\left(1 + \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1}\,\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}\right)\bar{p}_1 - \left(-\frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)} + \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1}\,\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)\bar{\bar{q}}_1 = \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1}\,\frac{\beta_1}{\varepsilon_1}\,\bar{p}_0,$$

$$\left(-\frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)} + \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1}\,\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)\bar{p}_1 + \left(-1 + \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1}\,\frac{\alpha_1^*}{\varepsilon_1}\right)\bar{\bar{q}}_1 = \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1}\,\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}\,\bar{p}_0.$$

[1] S. Fußnote 1 von Seite 417.

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen nach $\bar{p}_1$ und $\bar{\bar{q}}_1$ führt zu

$$\bar{p}_1(\lambda) = \frac{\beta_1\left(\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 - \alpha_1^*\right) + \delta_1\left[\frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 - \gamma_1\right]}{\left(\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 + \alpha_1\right)\left(\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 - \alpha_1^*\right) - \left[\frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 - \gamma_1\right]^2}\,\bar{p}_0(\lambda)\,, \tag{24}$$

$$\bar{\bar{q}}_1(\lambda) = -\frac{\beta_1\left[\frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 - \gamma_1\right] + \delta_1\left(\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 + \alpha_1\right)}{\left(\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 + \alpha_1\right)\left(\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 - \alpha_1^*\right) - \left[\frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 - \gamma_1\right]^2}\,\bar{p}_0(\lambda)\,. \tag{25}$$

Bei gleichem Material von Halbraum und Schicht folgt hieraus

$$\bar{p}_1(\lambda) = (1+\lambda h)\,e^{-\lambda h}\,\bar{p}_0(\lambda)\,,$$
$$\bar{\bar{q}}_1(\lambda) = -\lambda h\,e^{-\lambda h}\,\bar{p}_0(\lambda)$$

in Übereinstimmung mit (23), falls man auch dort $\bar{\bar{q}}_0 = 0$ und $k = 1$ setzt.

Hat man es dagegen mit einer Schicht auf starrer Unterlage zu tun, so folgt mit $E_2 \to \infty$ aus (24) und (25)

$$\bar{p}_1(\lambda) = \frac{\beta_1\alpha_1^* + \delta_1\gamma_1}{\alpha_1\alpha_1^* + \gamma_1^2}\,\bar{p}_0(\lambda)\,,$$
$$\bar{\bar{q}}_1(\lambda) = \frac{-\beta_1\gamma_1 + \delta_1\alpha_1}{\alpha_1\alpha_1^* + \gamma_1^2}\,\bar{p}_0(\lambda)$$

und mit den entsprechenden Ausdrücken (19)

$$\bar{p}_1(\lambda) = 2(1-\nu_1)\frac{2(1-\nu_1)\operatorname{Cof}\lambda h_1 + \lambda h_1 \operatorname{Sin}\lambda h_1}{(3-4\nu_1)\operatorname{Cof}^2\lambda h_1 + (\lambda h_1)^2 + (1-2\nu_1)^2}\,\bar{p}_0(\lambda)\,,$$

$$\bar{\bar{q}}_1(\lambda) = 2(1-\nu_1)\frac{(1-2\nu_1)\operatorname{Sin}\lambda h_1 - \lambda h_1 \operatorname{Cof}\lambda h_1}{(3-4\nu_1)\operatorname{Cof}^2\lambda h_1 + (\lambda h_1)^2 + (1-2\nu_1)^2}\,\bar{p}_0(\lambda)\,.$$

Besteht die Belastung aus einer Einzelkraft $P_0$ bei $r = 0$, dann bekommt man mit (11) nach Rücktransformation

$$p_1(r) = \frac{1-\nu_1}{\pi}\,P_0\int_0^\infty \lambda\,\frac{2(1-\nu_1)\operatorname{Cof}\lambda h_1 + \lambda h_1 \operatorname{Sin}\lambda h_1}{(3-4\nu_1)\operatorname{Cof}^2\lambda h_1 + (\lambda h_1)^2 + (1-2\nu_1)^2}\,I_0(\lambda r)\,d\lambda\,, \tag{26}$$

$$q_1(r) = \frac{1-\nu_1}{\pi}\,P_0\int_0^\infty \lambda\,\frac{(1-2\nu_1)\operatorname{Sin}\lambda h_1 - \lambda h_1 \operatorname{Cof}\lambda h_1}{(3-4\nu_1)\operatorname{Cof}^2\lambda h_1 + (\lambda h_1)^2 + (1-2\nu_1)^2}\,I_1(\lambda r)\,d\lambda\,. \tag{27}$$

**5. Der geschichtete Körper im Falle verschwindender Reibung.** Hier muß (natürlich unter der Voraussetzung, daß sich die Schichten nicht voneinander abheben) die Berührbedingung (13) erfüllt werden, während die Haftbedingung (14) entfällt. Wegen der Reibungsfreiheit ist

$$q_0 = q_1 = q_2 = \cdots = q_N = 0\,.$$

Berücksichtigt man dieses in (20), so lautet die Berührbedingung hier

$$\beta_{k+1}\,\bar{p}_{k+1} - (\alpha_{k+1} + \alpha_k\varphi_{k,k+1})\,\bar{p}_k + \beta_k\varphi_{k,k+1}\,\bar{p}_{k-1} = 0\,. \tag{28}$$

Die Differenzengleichung (28), angeschrieben für $k = 1, 2 \ldots N-1$, liefert $N-1$ lineare Gleichungen für die $N-1$ Unbekannten $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_{N-1}$ ($\bar{p}_0$ und $\bar{p}_N$ sind die bekannten Randlasten), nach deren Bestimmung der Spannungs- und Verformungszustand [Rücktransformation der Gl. (2‴) bis (7‴)] der einzelnen Schichten bekannt ist.

a) Der homogen-geschichtete Körper. Darunter soll ein Körper verstanden werden, der aus lauter gleichen Schichten aufgebaut ist. Mit $\alpha_k = \alpha$, $\beta_k = \beta$, $\varepsilon_k = \varepsilon$, $\varphi_{k,k+1} = 1$ erhält die Differenzengleichung (28) konstante Koeffizienten:

$$\bar{p}_{k+1} - \frac{2\alpha}{\beta}\,\bar{p}_k + \bar{p}_{k-1} = 0. \tag{29}$$

Bei insgesamt $N$ Schichten lautet die an die Randbedingungen ($p_0$ und $p_N$ seien vorgegeben) angepaßte Lösung[1] bei Berücksichtigung von (19)

$$\bar{p}_k(\lambda) = \frac{1}{\psi^N - \psi^{-N}} \left[ (\bar{p}_N - \psi^{-N}\, \bar{p}_0)\, \psi^k + (\psi^N\, \bar{p}_0 - \bar{p}_N)\, \psi^{-k} \right], \tag{30}$$

wobei

$$\psi = \frac{\lambda h + \mathfrak{Sin}\, \lambda h\, \mathfrak{Cof}\, \lambda h + \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \lambda h - (\lambda h)^2}\, \mathfrak{Sin}\, \lambda h}{\lambda h\, \mathfrak{Cof}\, \lambda h + \mathfrak{Sin}\, \lambda h} \tag{31}$$

und für $\lambda h \ll 1$ $\psi \approx 1 + \frac{(\lambda h)^2}{2\sqrt{3}}$ ist.

Für den homogen-geschichteten Halbraum folgt aus (29) mit $N \to \infty$

$$\bar{p}_k(\lambda) = \bar{p}_0(\lambda)\, \psi^{-k}(\lambda)$$

und nach Rücktransformation

$$p_k(r) = \int_0^\infty \lambda\, \bar{p}_0(\lambda)\, \psi^{-k}(\lambda)\, I_0(\lambda r)\, d\lambda\,. \tag{32}$$

Als Beispiel soll im folgenden der Spannungszustand in dem durch eine Einzelkraft $P_0$ am Rand beanspruchten homogen-geschichteten Halbraum untersucht werden. An der unteren Begrenzung der $k$ten Schicht tritt nach (32) und (11) der Druck

$$p_k(r^*) = \frac{P_0}{2\pi h^2} \int_0^\infty \lambda^*\, \psi^{-k}\, I_0(\lambda^* r^*)\, d\lambda^* \tag{33}$$

auf. Hierbei bedeuten $\lambda^*$ und $r^*$ die dimensionslosen Größen $\lambda^* = \lambda h$ und $r^* = \frac{r}{h}$ sowie gemäß (31)

$$\psi = \frac{\lambda^* + \mathfrak{Sin}\, \lambda^*\, \mathfrak{Cof}\, \lambda^* + \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* - \lambda^{*2}}\, \mathfrak{Sin}\, \lambda^*}{\lambda^*\, \mathfrak{Cof}\, \lambda^* + \mathfrak{Sin}\, \lambda^*}. \tag{34}$$

Die Spannungen $\sigma_r$ und $\sigma_\varphi$ am unteren Rand ($y = 0$) der $k$ten Schicht betragen nach (6‴) und (7‴) mit $\bar{\bar{q}} = \bar{\bar{q}}' = 0$ sowie $\bar{p} = \bar{p}_{k-1}$ und $\bar{p}' = \bar{p}_k$

$$\sigma_{rk}(r^*, 0) = -\frac{1}{r^* h^2} \int_0^\infty \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \left\{ -\left[ (1-2\nu)\, \mathfrak{Sin}^2 \lambda^* + \lambda^{*2} \right] \bar{p}_k + 2(1-\nu)\, \lambda^*\, \mathfrak{Sin}\, \lambda^*\, \bar{p}_{k-1} \right\} I_1(\lambda^* r^*)\, d\lambda^*$$

$$- \frac{1}{h^2} \int_0^\infty \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \left[ (\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* + \lambda^{*2})\, \bar{p}_k - 2\lambda^*\, \mathfrak{Sin}\, \lambda^*\, \bar{p}_{k-1} \right] \lambda^*\, I_0(\lambda^* r^*)\, d\lambda^*\,, \tag{35}$$

$$\sigma_{\varphi k}(r^*, 0) = \frac{1}{r^* h^2} \int_0^\infty \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \left\{ -\left[ (1-2\nu)\, \mathfrak{Sin}^2 \lambda^* + \lambda^{*2} \right] \bar{p}_k + 2(1-\nu)\, \lambda^*\, \mathfrak{Sin}\, \lambda^*\, \bar{p}_{k-1} \right\} I_1(\lambda^* r^*)\, d\lambda^*$$

$$- \frac{2\nu}{h^2} \int_0^\infty \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \left( \mathfrak{Sin}^2 \lambda^*\, \bar{p}_k - \lambda^*\, \mathfrak{Sin}\, \lambda^*\, \bar{p}_{k-1} \right) \lambda^*\, I_0(\lambda^* r^*)\, d\lambda^*\,. \tag{36}$$

Für $r^* = 0$ folgt hieraus

$$\sigma_{rk}(0,0) = \sigma_{\varphi k}(0,0) = \frac{1}{2h^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^*}{\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \left\{ 2(1+\nu)\, \lambda^*\, \mathfrak{Sin}\, \lambda^*\, \bar{p}_{k-1} - \left[ (1+2\nu)\, \mathfrak{Sin}^2 \lambda^* + \lambda^{*2} \right] \bar{p}_k \right\} d\lambda^*. \tag{37}$$

Im betrachteten Beispiel ergibt sich mit $\bar{p}_k = \frac{P_0}{2\pi} \psi^{-k}$

$$\sigma_{rk}(0,0) = \sigma_{\varphi k}(0,0) = \frac{P_0}{4\pi h^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^*}{\mathfrak{Sin}^2 \lambda^* - \lambda^{*2}} \frac{2(1+\nu)\, \lambda^*\, \psi\, \mathfrak{Sin}\, \lambda^* - \left[ (1+2\nu)\, \mathfrak{Sin}^2 \lambda^* + \lambda^{*2} \right]}{\psi^k}\, d\lambda^*\,. \tag{38}$$

[1] Siehe meine in Fußnote 1 von Seite 417 zitierte Arbeit, dort Gl. (57).

Das Integral (33) (mit $r^* = 0$) und das Integral (38), das außerdem von der Querdehnzahl $\nu$ abhängt, wurden für $k = 1, 2, 3 \ldots 10$ numerisch ausgewertet und die Ergebnisse in Abb. 6 niedergelegt. Die Spannung $\sigma_{r\,k}(0, 0)$ wurde dabei jeweils für die zwei Extremwerte der Querdehnzahl $\nu = 0$ und $\nu = 0{,}5$ ermittelt. In Abb. 6 sind außerdem die entsprechenden, im nicht-geschichteten

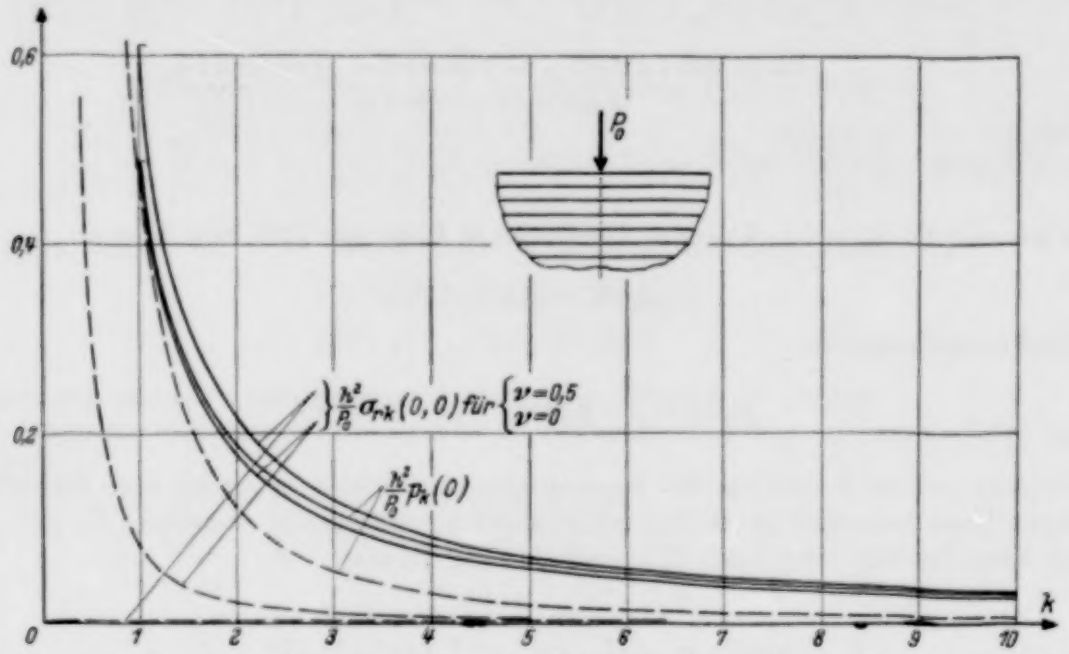



Abb. 6. ——— Verlauf der Spannungen $p_k(0)$ und $\sigma_{r\,k}(0, 0)$ in dem durch eine normal gerichtete Einzelkraft beanspruchten homogen-geschichteten Halbraum längs der Wirkungslinie der Kraft für $\nu = 0$ und $\nu = 0{,}5$ (Gültig für $k = 1, 2, 3, \ldots$); ----- Verlauf der entsprechenden Spannungen im nichtgeschichteten Halbraum.

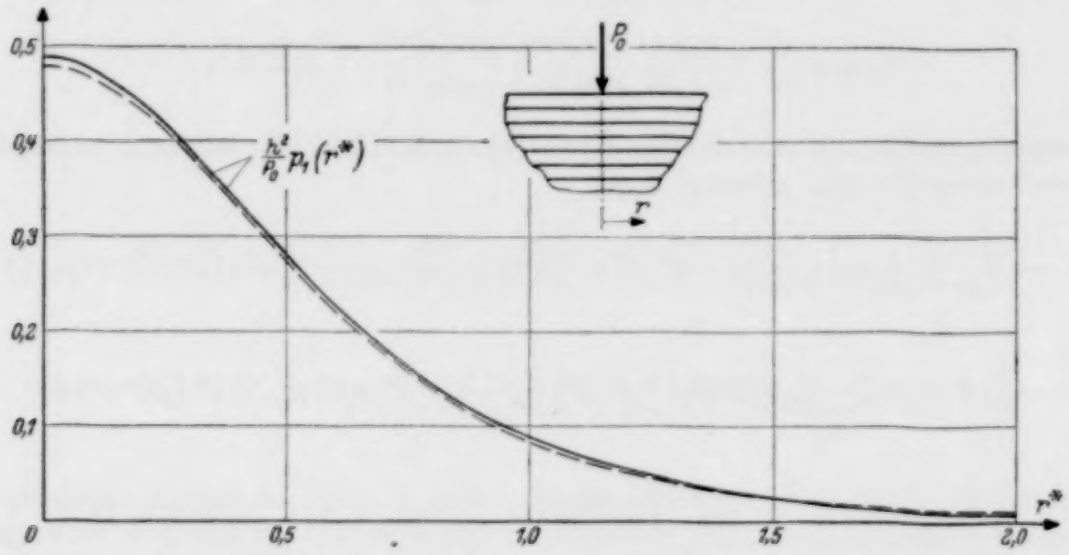



Abb. 7. ——— Verlauf des Drucks $p_1(r^*)$ in dem durch eine normal gerichtete Einzelkraft beanspruchten homogen-geschichteten Halbraum längs des unteren Randes der ersten Schicht; ----- Verlauf des entsprechenden Drucks im nicht-geschichteten Halbraum.

Halbraum längs der Wirkungslinie der Kraft $P_0$ auftretenden Spannungen $p(0)$ und $(\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_\varphi)_{r=0}$ eingetragen. Diese errechnen sich gemäß (12) zu

$$p(0) = -\sigma_y(0, \eta) = \frac{3}{2\pi} P_0 \frac{1}{\eta^2}; \qquad \sigma_r(0, \eta) = \sigma_\varphi(0, \eta) = \frac{1 - 2\nu}{4\pi} P_0 \frac{1}{\eta^2} \qquad (\eta = k\,h).$$

Der Vergleich zeigt, daß der Druck $p_k(0)$ im reibungslos geschichteten Körper wesentlich langsamer abklingt als im nichtgeschichteten Körper; derselbe Befund ergab sich auch beim ebenen Problem.

Ferner wurde die Druckverteilung unter der ersten Schicht ($k = 1$) $p_1(r^*)$ nach (33) ermittelt und in Abb. 7 kurvenmäßig dargestellt. Zum Vergleich ist dort wiederum die entsprechende Druckverteilung im nicht-geschichteten Körper, für welche nach (12)

$$p_1(r^*) = -(\sigma_y)_{\eta=h} = \frac{3}{2\pi} \frac{P_0}{h^2} \frac{1}{(1 + r^{*2})^{5/2}}$$

gilt, eingetragen.

**b) Der Halbraum mit anschließender Schicht.** Gemäß (19) und (22) folgt mit $h_2 \to \infty$ für den Halbraum

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 = \left.\frac{e^{2\lambda h_2}}{4}\right|_{h_2\to\infty},$$

$$\beta_2 = \lambda h_2 \left.\frac{e^{\lambda h_2}}{2}\right|_{h_2\to\infty},$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\frac{E_2}{E_1}\left.\frac{e^{2\lambda h_2}}{4\varepsilon_1}\right|_{h_2\to\infty},$$

womit die Berührbedingung (28) (für $k = 1$) übergeht in

$$\bar{p}_1(\lambda) = \frac{\beta_1}{\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\varepsilon_1 + \alpha_1}\,\bar{p}_0(\lambda).$$

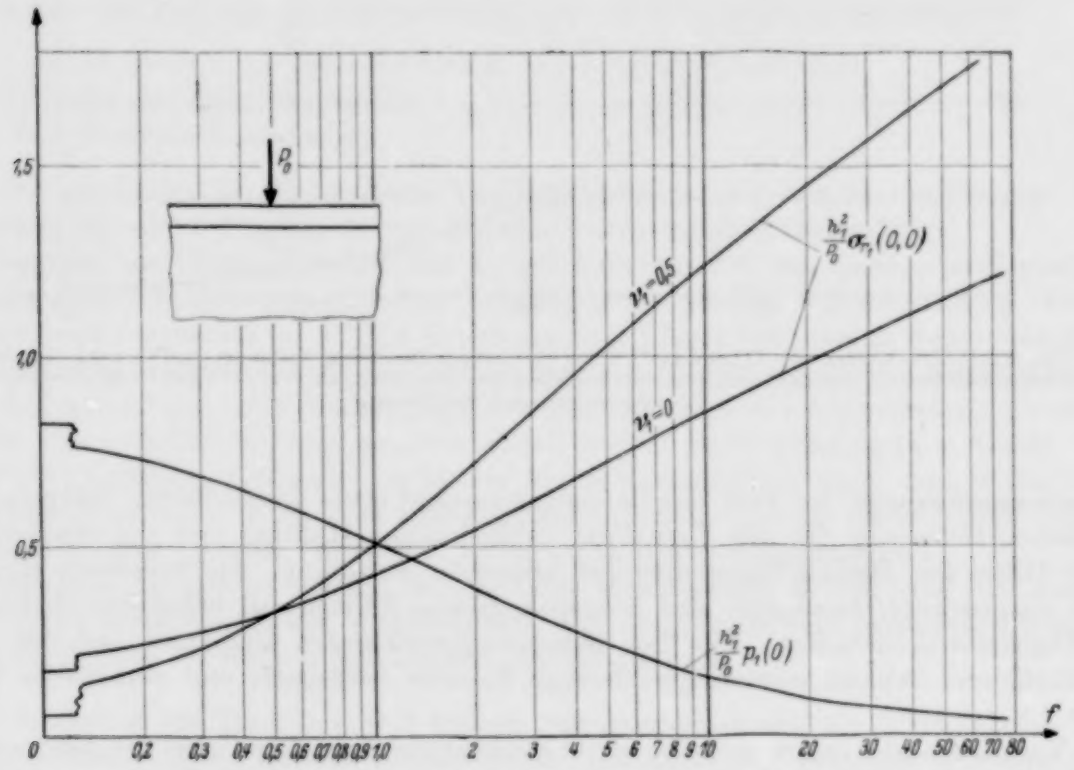



Abb. 8. Spannungen $p_1(0)$ und $\sigma_{r1}(0,0)$ in der durch eine Einzelkraft normal belasteten, auf einem Halbraum reibungsfrei liegenden Schicht in Abhängigkeit vom Parameter $f$ für $\nu_1 = 0$ und $\nu_1 = 0{,}5$.

Einsetzen von $\alpha_1$, $\beta_1$, $\varepsilon_1$ [nach (19)] führt zur Formel

$$\bar{p}_1(\lambda) = \frac{\lambda h_1 \operatorname{Cof}\lambda h_1 + \operatorname{Sin}\lambda h_1}{\frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}\left[\operatorname{Sin}^2\lambda h_1 - (\lambda h_1)^2\right] + \lambda h_1 + \operatorname{Sin}\lambda h_1 \operatorname{Cof}\lambda h_1}\,\bar{p}_0(\lambda). \tag{39}$$

Besteht die Belastung aus einer **Einzelkraft** $P_0$, so erhält man aus (11) $\bar{p}_0 = P_0/2\pi$ und mit den dimensionslosen Größen $\lambda^* = \lambda h_1$, $r^* = r/h_1$ sowie mit der Abkürzung

$$f = \frac{1-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}\frac{E_1}{E_2}$$

aus (39) nach Rücktransformation

$$p_1(r^*) = \frac{P_0}{2\pi h_1^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^* \operatorname{Cof}\lambda^* + \operatorname{Sin}\lambda^*}{f(\operatorname{Sin}^2\lambda^* - \lambda^{*2}) + \lambda^* + \operatorname{Sin}\lambda^* \operatorname{Cof}\lambda^*}\,\lambda^*\, I_0(\lambda^* r^*)\, d\lambda^*. \tag{40}$$

Für die tangentiale Randspannung am unteren Rand der Schicht bei $r = 0$ gilt (37) (mit $k = 1$). Setzt man dort $\bar{p}_0$ und $\bar{p}_1$ gemäß obigem ein, dann folgt

$$\sigma_{r_1}(0,0) = \sigma_{\varphi_1}(0,0)$$

$$= \frac{P_0}{4\pi h_1^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^*}{\operatorname{Sin}^2\lambda^* - \lambda^{*2}}\left\{2(1+\nu_1)\lambda^* \operatorname{Sin}\lambda^* - \frac{[(1+2\nu_1)\operatorname{Sin}^2\lambda^* + \lambda^{*2}](\lambda^* \operatorname{Cof}\lambda^* + \operatorname{Sin}\lambda^*)}{f(\operatorname{Sin}^2\lambda^* - \lambda^{*2}) + \lambda^* + \operatorname{Sin}\lambda^* \operatorname{Cof}\lambda^*}\right\} d\lambda^*. \tag{41}$$

Die Integrale (40) und (41) wurden numerisch ausgewertet. Abb. 8 zeigt den nach (40) errechneten Maximaldruck unter der Schicht $p_1(0)$ und die Spannung $\sigma_{r_1}(0, 0) = \sigma_{\varphi_1}(0, 0)$ nach (41) in Abhängigkeit vom Parameter $f$. Letztere wurde für die beiden Extremwerte der Querdehnzahl der Schicht ($\nu_1 = 0$ und 0,5) ermittelt. In Abb. 9 ist schließlich die aus (40) für $f = 1$ (d. h. Schicht und Halbraum bestehen aus gleichem Material) erhaltene Druckverteilung $p_1(r^*)$ dargestellt und außerdem wieder die entsprechende für den Halbraum ohne Schnitt gültige Druckverteilung eingetragen[1].

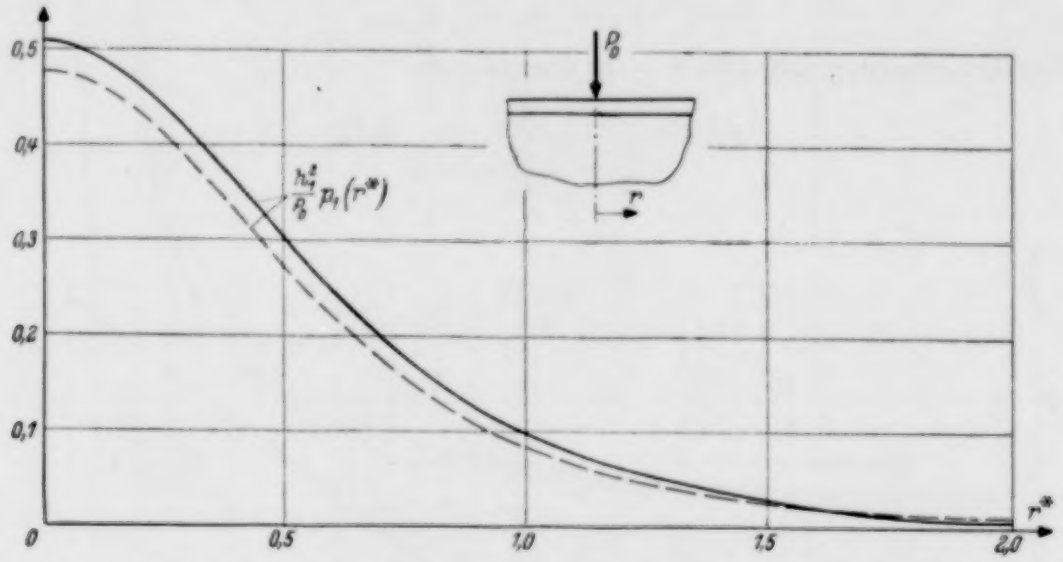



Abb. 9. ——— Verlauf des Drucks $p_1(r^*)$ längs der unteren Berandung der durch eine normal gerichtete Einzelkraft belasteten, auf einem Halbraum reibungsfreiliegenden Schicht für $f = 1$; - - - - - Verlauf des entsprechenden Drucks im Halbraum ohne Schnitt.

**6. Zusammenfassung.** Es wird der Spannungszustand eines geschichteten Körpers bei axialsymmetrischer Belastung für die Grenzfälle vollkommener Haftung und verschwindender Reibung mit Hilfe der *Hankel*-Transformation allgemein bestimmt. Als Schichten dienen dabei unendlich ausgedehnte, homogene und isotrop-elastische Platten mit beliebigen Dicken und beliebigen Elastizitätskonstanten. Für den homogen-geschichteten Halbraum und den Halbraum mit anschließender Schicht werden geschlossene Formeln hergeleitet und numerische Ergebnisse mitgeteilt.

Beim Vorhandensein lauter voneinander verschiedener Schichten wird die Rechnung naturgemäß sehr umfangreich; in diesem Fall läßt sich das Problem mittels Übertragungsmatrizen in übersichtlicher Weise behandeln, wie an anderer Stelle noch gezeigt werden soll.

(Eingegangen am 21. Oktober 1960.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr. *H. Bufler*, München 2, Arcisstr. 21, Lehrstuhl für Mechanik.

[1] Vgl. hierzu *K. Marguerre*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 332.

# Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis*

Von K. Gersten

**1. Einleitung.** Mit der Entwicklung der Flugzeuge zu immer höheren Fluggeschwindigkeiten war zwangsläufig auch eine Entwicklung zu neuen, den jeweiligen Erfordernissen angepaßten Tragflügelformen verbunden. Verfolgt man die verschiedenen Tragflügelformen von dem einfachen ungepfeilten Flügel mit großem Seitenverhältnis und ziemlich dickem Profil der ersten Flugzeuge bis hin zu den schlanken, extrem dünnen Deltaflügeln moderner Überschallflugzeuge, so läßt sich die Entwicklung im wesentlichen durch drei Merkmale charakterisieren[1]:

a) Das relative Dickenverhältnis der Profile des Flügels wird kleiner.
b) Die Pfeilung der Flügel nimmt zu.
c) Das Seitenverhältnis nimmt ab.

Daher ist verständlich, daß die moderne Tragflügelaerodynamik sich in verstärktem Maße mit dünnen, stark gepfeilten Tragflügeln von kleinem Seitenverhältnis beschäftigt.

Die Strömung um einen schlanken Deltaflügel unterscheidet sich ganz grundlegend von der Umströmung eines klassischen ungepfeilten Tragflügels mit großem Seitenverhältnis. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß im Gegensatz zum Flügel mit großem Seitenverhältnis beim Flügel mit kleinem Seitenverhältnis der Auftrieb und das Kippmoment nicht mehr linear mit dem Anstellwinkel anwachsen. Die Abhängigkeit des Auftriebs und des Kippmomentes vom Anstellwinkel läßt sich aufteilen in einen linearen Anteil und in einen nichtlinearen Anteil. Letzterer gewinnt immer mehr an Bedeutung, je kleiner das Seitenverhältnis wird, und ist bei Seitenverhältnissen von etwa $\Lambda = b^2/F = 1$ bei mäßigen Anstellwinkeln ($\alpha = 15°$ bis $20°$) schon von gleicher Größenordnung wie der lineare Anteil und daher nicht mehr vernachlässigbar.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der theoretischen Berechnung der Auftriebsverteilung und der aerodynamischen Kraftbeiwerte von Tragflügeln mit besonderer Betonung der nichtlinearen Effekte bei Flügeln mit kleinem Seitenverhältnis.

**2. Die Strömung um Tragflügel mit kleinen Seitenverhältnissen.** a) Wirbelschichten am Tragflügel. Die Ursache für den nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Kraftbeiwerten und dem Anstellwinkel liegt in der besonderen Art der Strömung um Flügel mit kleinen Seitenverhältnissen. Da die Seitenkanten bzw. die gepfeilten Vorderkanten groß sind im Vergleich zur Spannweite, wird das gesamte Strömungsbild von der Umströmung der Seitenkanten bzw. Vorderkanten bestimmt. Wie die Skizzen in Abb. 1a zeigen, führt die Umströmung der Seiten- bzw. Vorderkanten im allgemeinen zur Ablösung und dadurch zur Bildung von Wirbelschichten, die sich sehr bald zu stark konzentrierten Wirbelzöpfen aufrollen. Während bei sehr kleinen Anstellwinkeln (lineare Theorie) eine Wirbelschicht nach Abb. 1b nur von der Flügelhinterkante abgeht, kommen bei größeren Anstellwinkeln die an den Seiten- bzw. Vorderkanten entstehenden Wirbelschichten dazu, die das Bild grundlegend ändern. Insbesondere liegen die an den Seiten entstehenden Wirbelschichten und die dazugehörigen Wirbelzöpfe nicht mehr in derselben Ebene mit der Wirbelschicht, die von der Hinterkante abgeht. Vielmehr ändert sich der Abstand zwischen den Wirbelzöpfen und der Flügelebene noch mit dem Anstellwinkel, wodurch die nichtlineare Abhängigkeit der Strömungsgrößen vom Anstellwinkel hervorgerufen wird. Das Auftreten einer

* Aus dem Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig (Leiter: Prof. Dr. *H. Schlichting*). Gekürzte Fassung der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig genehmigten Habilitationsschrift, 1960 (Referenten: Prof. Dr. *H. Schlichting*, Prof. Dr. *H. Blenk*, Prof. Dr.-Ing. *H. Schaefer*, Prof. Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*). — Ausführliche Fassung: Nichtlineare Tragflächentheorie, insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis. Bericht 59/30 d. Inst. f. Strömungsmechanik der TH Braunschweig (1959); auszugsweise vorgetragen auf der GAMM-Tagung, Saarbrücken, 8.—12. 4. 1958, auf dem 10. Internationalen Mechanik-Kongreß, Stresa, 31. 8.—7. 9. 1960, und auf der Tagung des „Fluid Dynamics Panel" der AGARD in Brüssel, 10. 4.—14. 4. 1961. Teilergebnisse findet man in *K. Gersten*, Z. Flugwiss. 5 (1957), S. 276 und *K. Gersten*, Jahrbuch 1958 der Wiss. Ges. f. Luftfahrt, S. 25.

[1] *H. Schlichting* u. *E. Truckenbrodt*, Aerodynamik des Flugzeuges, Bd. I (1959), Bd. II (1960), Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Nichtlinearität folgt demnach aus der Tatsache, daß die vom Tragflügel abgehenden freien Wirbel nicht mehr sämtlich in einer Ebene liegen.

b) Einfluß der Vorderkantenform. Wie aus Messungen[1, 2, 3] bekannt ist, hängt die Größe des nichtlinearen Anteiles sehr stark von der Form der umströmten Vorderkanten

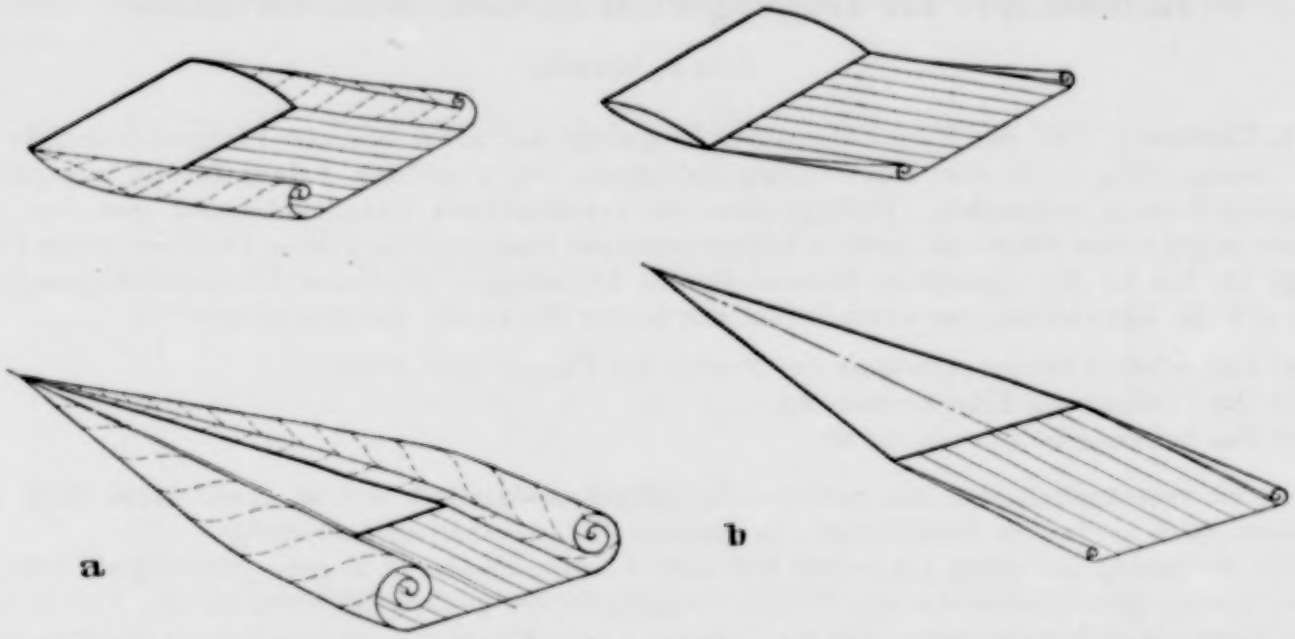



Abb. 1. Entstehung der Wirbelflächen bei Rechteck- und Deltaflügeln. — a) großer Anstellwinkel (nichtlineare Theorie); b) kleiner Anstellwinkel (lineare Theorie).

bzw. Seitenkanten ab. Da die nichtlinearen Effekte hauptsächlich durch die Ablösung der Strömung und die Wirbelbildung an den Flügelkanten hervorgerufen werden, ist verständlich, daß die nichtlinearen Anteile bei zugeschärften Kanten größer sind als bei abgerundeten Kanten. Abb. 2 zeigt für zwei Rechteckflügel mit verschiedenen Formen der Vorder- und Seitenkanten die Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes vom Anstellwinkel nach Messungen von *H. Winter*[3]. Zum Vergleich sind die theoretischen Kurven nach der später noch zu behandelnden linearen Theorie eingezeichnet. Die beiden Meßkurven für runde Vorderkante, aber verschiedene Formen der Seitenkante, liegen jeweils dicht zusammen. Durch Zuspitzung der Vorderkante dagegen werden die nichtlinearen Anteile ungefähr verdoppelt. Das rührt daher, daß infolge der Zuschärfung die Strömung an der Vorderkante zwar ablöst, jedoch etwas stromabwärts wieder anliegt, so daß die Umströmung in Tiefenrichtung im großen und ganzen mit der reibungslosen Strömung um ein Profil übereinstimmt. Das Totwasser in dem Ablösungsgebiet nahe der Vorderkante wird nun bei Tragflügeln mit kleinem Seitenverhältnis in das Unterdruckgebiet der Randwirbel hineingesaugt, was zu einer starken Vergrößerung der seitlichen Ablösungszonen und damit der Wirbelschichtbildung führt. Daraus ergibt sich dann die Zunahme der nichtlinearen Effekte. Die Form der Seitenkantenausbildung ist deshalb nicht von so großer Bedeutung, da es bei der seitlichen Umströmung sowieso zu einer Ablösung kommt, unabhängig davon, ob die Kante scharf oder rund ausgebildet ist.

Einen entsprechenden Vergleich für die Beiwerte von Auftrieb und Kippmoment bei einem Deltaflügel (Seitenverhältnis $\Lambda = b^2/F = 0{,}78$, Zuspitzung $\lambda = l_a/l_i = 0{,}125$) und einem Pfeilflügel jeweils mit zugeschärfter und runder Vorderkante zeigt Abb. 3. Auch hier ergibt sich, daß bei Zuschärfung der Vorderkanten die nichtlinearen Anteile etwa doppelt so groß sind wie bei abgerundeter Vorderkante, ein Befund, der auch von anderen Autoren[1, 2] bestätigt worden ist.

Da aus den vorhandenen Meßergebnissen hervorgeht, daß durch Abrundung der Vorderkanten die nichtlinearen Anteile der Kraftbeiwerte gerade auf die Hälfte absinken, sollen die folgenden Untersuchungen der Einfachheit halber auf solche Tragflügel beschränkt werden, bei denen die Vorderkanten zugeschärft sind, da die Umrechnung auf abgerundete Vorderkanten keine Schwierigkeiten bereitet.

[1] *G. E. Bartlett* u. *R. J. Vidal*, Journ. Aero. Sci. 22 (1955), S. 517.

[2] *A. H. Flax* u. *H. R. Lawrence*, The aerodynamics of low-aspect-ratio wings and wing-body combinations; Anglo-American Aeronautical Conference, Brighton 1951, S. 363.

[3] *H. Winter*, Forschung Ing.-Wes. 6 (1935), S. 40 u. S. 67.

**c) Induzierter Widerstand.** Der Unterschied zwischen runder und zugeschärfter Vorderkante ist aerodynamisch dadurch gekennzeichnet, daß bei runder Vorderkante durch die Umströmung Saugkräfte entstehen, während bei zugeschärfter Vorderkante infolge Ablösung der Strömung diese Saugkräfte fortfallen. Bei dem im folgenden immer zugrunde gelegten Fall zugeschärfter Vorderkante wird daher bei reibungsloser Strömung die resultierende Luftkraft stets senkrecht auf der Flügelebene stehen. Aus dem Beiwert dieser Normalkraft $c_N$ erhält man dann den Auftriebsbeiwert zu $c_A = c_N \cos\alpha$ und den Widerstandsbeiwert zu $c_{Wi} = c_N \sin\alpha$. Für kleine Anstellwinkel ergibt sich daraus näherungsweise

$$c_A = c_N\,, \tag{1}$$

$$c_{Wi} = c_A\,\alpha\,. \tag{2}$$

Da man also aus dem Auftrieb sofort den Widerstandsbeiwert erhält, sind im folgenden alle Betrachtungen auf Auftrieb und Kippmoment beschränkt.

**d) Einfluß der Kompressibilität.** Die nichtlinearen Effekte treten besonders stark auf bei Tragflügeln mit kleinem Seitenverhältnis. Nun ist aber bekannt, daß die Strömung um schlanke Körper, also auch um Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis, unabhängig von der Machzahl ist.

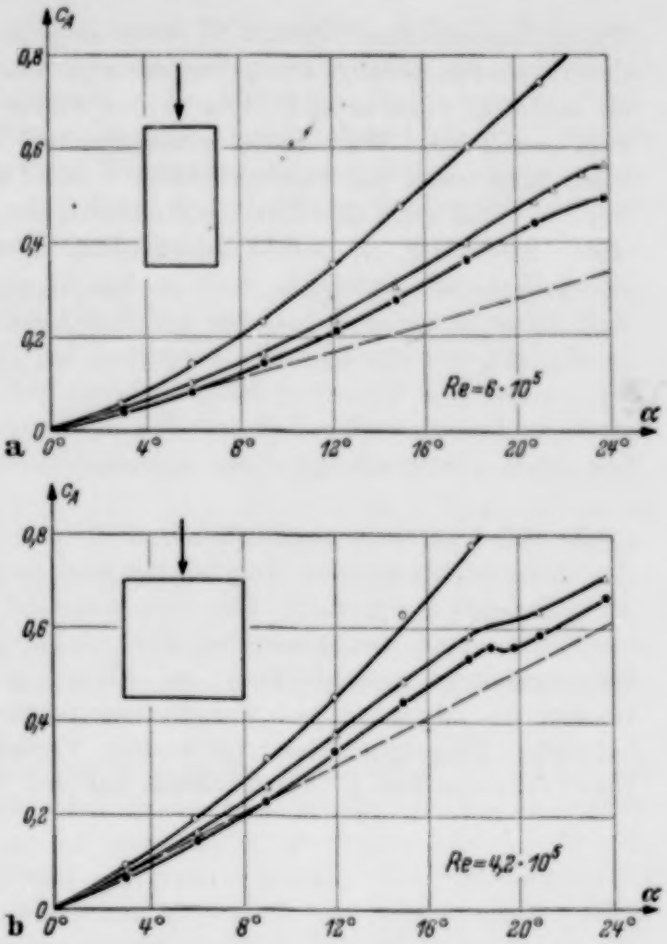



Abb. 2. Einfluß der Form der Vorder- und Seitenkanten von Rechteckflügeln auf die Auftriebskurve. — a) Seitenverhältnis $\Lambda = 0{,}5$; b) Seitenverhältnis $\Lambda = 1{,}0$. — Messungen nach *H. Winter* (s. Fußnote 3 von S. 432) — — ● —— Vorderkante und Seitenkante rund; ——○—— Vorderkante und Seitenkante scharf; ——△—— Vorderkante rund, Seitenkante scharf; ——— — — Lineare Theorie nach *E. Truckenbrodt*.

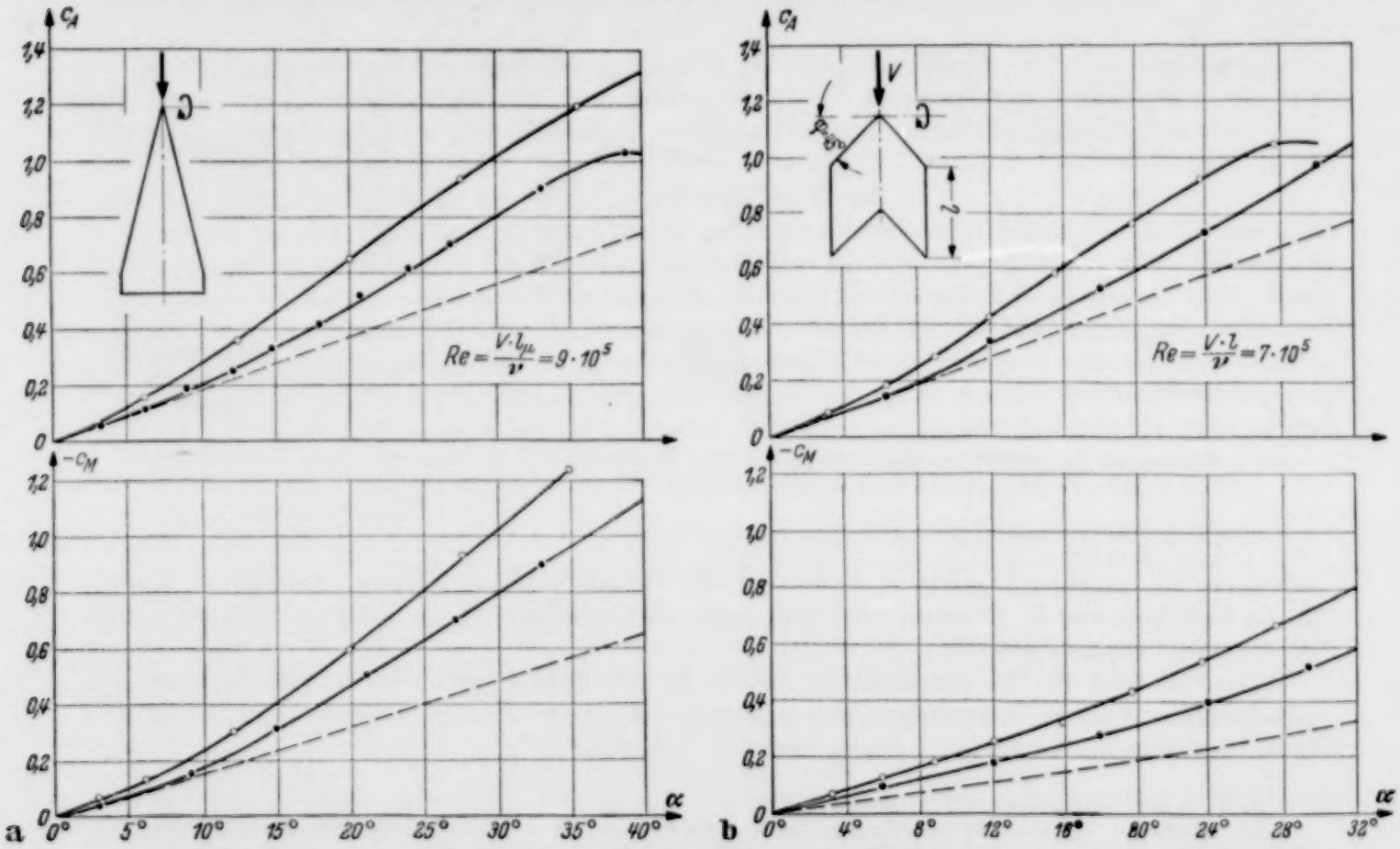



Abb. 3. Einfluß der Vorderkantenform auf Auftriebs- und Momentenkurven. — a) Deltaflügel, $\Lambda = 0{,}78$, $\lambda = 0{,}125$; b) Pfeilflügel, $\Lambda = 1{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $\varphi = 45°$. — ——●—— Vorderkante rund; ——○—— Vorderkante scharf; — — — — lineare Theorie nach *E. Truckenbrodt*.

Dieses Ergebnis aus der von *R. T. Jones*[1] begründeten linearen Theorie schlanker Flügel (slender-body-theory) wird auch von den Experimenten gut bestätigt. Bei Überschallanströmung gilt der Flügel dann als schlank, wenn er sich etwa in der Achse des Mach-Kegels befindet und seine Vorderkanten weit genug vom Mach-Kegel entfernt sind. Da mit zunehmender Machzahl der Kegel spitzer wird, muß auch das Seitenverhältnis des Flügels bei gleichen Schlankheitsforderungen kleiner werden. Daß trotz der Überschallanströmung die Strömung um den Flügel gleich der inkompressiblen Strömung ist, beruht darauf, daß infolge der Schlankheit des Flügels die wirksame Geschwindigkeitskomponente, z. B. senkrecht zur Vorderkante eines Deltaflügels, nur sehr klein ist und daher zu gleichen Strömungsverhältnissen wie im inkompressiblen Fall führt.

Da also die kompressible Strömung bei sehr schlanken Tragflügeln im wesentlichen mit der inkompressiblen Strömung übereinstimmt und bei Tragflügeln mit großem Seitenverhältnis wenigstens im Unterschallbereich auf den inkompressiblen Fall zurückgeführt werden kann, sollen die folgenden Untersuchungen auf inkompressible Strömung beschränkt werden.

**3. Bisherige theoretische Arbeiten.** Die meisten theoretischen Verfahren zur Berechnung von Auftriebsverteilungen an Tragflügeln sind lineare Verfahren, d. h. ihre Anwendung ist auf kleine Anstellwinkel beschränkt. Man unterscheidet bei ihnen zwischen den einfacheren Traglinienverfahren und den genaueren, dafür komplizierteren Tragflächenverfahren. Da die Traglinienverfahren ausschließlich auf Flügel mit großen Seitenverhältnissen zugeschnitten sind, werden im folgenden nur Tragflächenverfahren benutzt. Die wichtigsten sind die beiden für beliebige Flügelgrundrisse geltenden Verfahren von *H. Multhopp*[2] und *E. Truckenbrodt*[3]. Das Verfahren von *E. Truckenbrodt* hat den Vorteil, daß es im Grenzfall sehr kleinen Seitenverhältnisses die gleichen Ergebnisse liefert wie die Theorie schlanker Körper von *R. T. Jones*[1]. Dieses Verfahren von *E. Truckenbrodt* wurde daher als Grundlage für das weiter unten entwickelte Berechnungsverfahren gewählt.

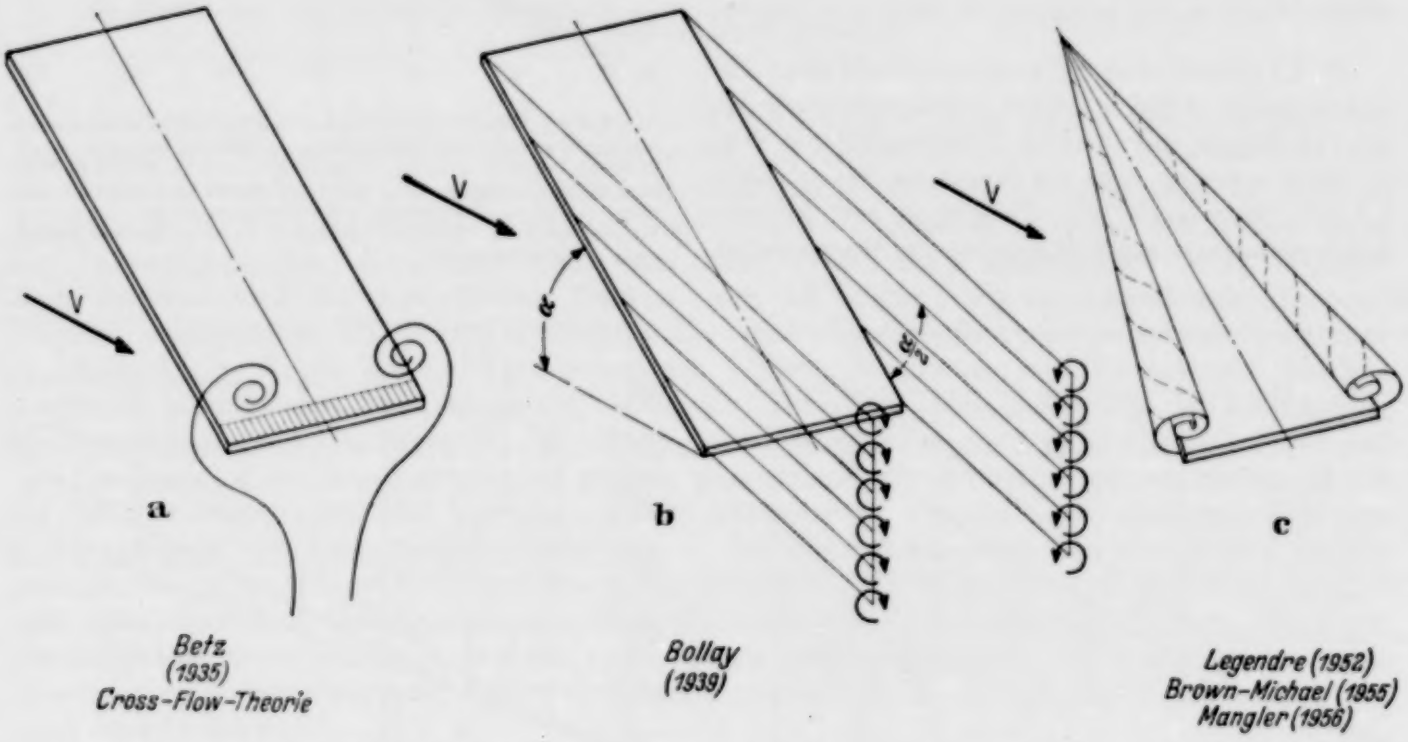



Abb. 4. Wirbelmodelle der verschiedenen bestehenden nichtlinearen Tragflügeltheorien für Flügel mit kleinen Seitenverhältnissen.

Versuche, auch für die nichtlinearen Anteile Berechnungsverfahren zu entwickeln, sind von verschiedenen Autoren insbesondere in den letzten Jahren unternommen worden. Es lassen sich diese Verfahren in drei große Gruppen einteilen (vgl. Abb. 4)

[1] *R. T. Jones*, NACA-Report 835 (1946), S. 59.
[2] *H. Multhopp*, Method for calculating the lift distribution of wings (Subsonic lifting-surface theory). ARC RM 2884 (1955); vgl. auch *H. Multhopp*; Luftfahrtforschung (1936) S. 153—169.
[3] *E. Truckenbrodt*, Jahrbuch 1953 der Wiss. Ges. f. Luftfahrt, S. 40.

a) Cross Flow Theory. Die ersten rechnerischen Ansätze stammen von *A. Betz*[1] und sind heute unter dem Namen cross-flow-theory bekannt[2]. Bei dieser rein empirischen Methode wird davon ausgegangen, daß die seitliche Querumströmung des Flügels an Bedeutung gewinnt, falls die Spannweite klein ist gegenüber der Flügeltiefe. Der nichtlineare Anteil für den Normalkraftbeiwert ergibt sich dann im wesentlichen aus dem Widerstandsbeiwert dieser nahezu zweidimensionalen Querströmung (Abb. 4a). Meistens wird dabei den Rechnungen der Widerstandsbeiwert der sehr langen quergestellten Platte $c_W = 2{,}0$ zugrunde gelegt.

b) Rechteckflügel von kleinem Seitenverhältnis. Die zweite Theorie stammt von *W. Bollay*[3]. Diese ist beschränkt auf Rechteckflügel mit sehr kleinem Seitenverhältnis. Dabei wird von einem Wirbelmodell ausgegangen, bei welchem die freien Wirbel nicht mehr in einer Ebene liegen, sondern an den Seitenkanten jeweils unter dem Winkel $\alpha/2$ zur Flügelebene nach hinten abgehen (Abb. 4b). Daß der Neigungswinkel gerade $\alpha/2$ sein muß, läßt sich so einsehen: Da die Strömungsrichtung am Flügel parallel zur Flügelebene liegt (kinematische Strömungsbedingung), muß die Strömungsrichtung beim Durchgang durch die seitlichen Wirbelschichten um den Winkel $\alpha$ gedreht werden. Bekanntlich liegt der Wirbelvektor in der mittleren Strömungsrichtung, folglich müssen die Wirbelvektoren unter dem Winkel $\alpha/2$ zur Flügelebene geneigt sein. *W. Bollay* macht nun außerdem die Annahme, daß diese Richtung auch weiter stromabwärts eingehalten wird, so daß das seitliche Wirbelband aus geraden Wirbelfäden besteht. Da die Wirbelstärke längs Spannweite konstant angesetzt ist, bleibt jedoch die Anwendung auf sehr kleine Seitenverhältnisse beschränkt.

c) Schlanke Deltaflügel. In neuerer Zeit wurde von mehreren Autoren[4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] die Strömung um sehr schlanke Deltaflügel untersucht, bei denen sich infolge der Vorderkantenablösung zwei Wirbelschichten an den Vorderkanten entwickeln, die sich über der Flügelfläche in zwei mehr oder weniger konzentrierte Wirbel aufrollen (Abb. 4c). Von den genannten Autoren wird diese Strömung durch ein geeignetes Wirbelmodell ersetzt, was dann auch die nichtlinearen Glieder für die Kraftbeiwerte liefert. Der Grund für die Nichtlinearität liegt darin, daß wie im Wirbelmodell von *W. Bollay* die Wirbel nicht mehr in einer einzigen Ebene liegen.

Alle genannten Verfahren sind auf kleine Seitenverhältnisse beschränkt (slender body theory). Sie gestatten daher keine Aussagen über den Einfluß des Seitenverhältnisses $A$ auf die Größe der nichtlinearen Glieder. Darüber hinaus sind sie nur auf bestimmte Flügelformen (Rechteckflügel oder Deltaflügel) oder spezielle Strömungen (z. B. konische Strömungen) anwendbar.

**4. Wirbelmodell und Grundgleichungen des Berechnungsverfahrens.** Zur Aufgabe ist gestellt, für einen Tragflügel von beliebiger Grundrißform und mit zugeschärften Vorderkanten die Auftriebsverteilung und die aerodynamischen Beiwerte für inkompressible Strömung zu berechnen mit besonderer Berücksichtigung der nichtlinearen Abhängigkeit der Beiwerte vom Anstellwinkel. Der Einfachheit halber habe der Flügel symmetrisches Profil.

Obwohl bei der Umströmung von Flügeln mit kleinem Seitenverhältnis der Reibungseinfluß in der Strömung maßgeblich beteiligt und insbesondere für die Ablösung und Wirbelbildung an den Kanten verantwortlich ist, soll im folgenden bei der theoretischen Behandlung solcher Tragflügelströmung reibungslose Flüssigkeit vorausgesetzt werden. In der Tragflügeltheorie und auch bei anderen Strömungsproblemen (z. B. Sekundärströmung in gekrümmten Rohren oder Kanälen, Sekundärströmung hinter Schaufelgittern) ist es üblich, das unter dem Einfluß der Reibung entstandene Strömungsfeld experimentell genau zu erforschen und danach möglichst genau durch

[1] *A. Betz*, Applied Airfoil Theory; in *W. F. Durand*: Aerodynamic Theory, Bd. IV, Berlin 1935.
[2] Siehe Fußnoten 1 und 2 von Seite 432.
[3] *W. Bollay*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 21; vgl. auch Journ. Aero. Sci. 4 (1937), S. 294.
[4] *C. E. Brown* u. *W. H. Michael*, Journ. Aero. Sci. 21 (1954), S. 690; vgl. NACA TN 3430 (1955).
[5] *P. T. Fink*, Z. Flugwiss. 4 (1956), S. 247.
[6] *D. Küchemann*, RAE-Report Aero 2540 (1955).
[7] *R. Legendre*, Écoulement au voisinage de la pointe avant d'une aile a forte fleche aux incidences moyennes. La Recherche Aéronautique; Bulletin Bimestrial de l'Office National d'Etudes et de Récherches Aéronautiques (1952).
[8] *K. W. Mangler* u. *J. H. B. Smith*: Calculation of the flow past slender delta wings with leading edge separation. Actes de IX. Congres Intern. de Mechanique Appliquee, Bd. II, S. 137 (1956); vgl. auch RAE TN 2593 sowie *K. W. Mangler* u. *J. H. B. Smith*; Proceed. Roy. Soc. A 251 (1959), S. 200.
[9] *M. Roy*, Z. angew. Math. Phys. 9b (1958), S. 554 (Ackeret-Festschrift); vgl. auch *M. Roy*; Recherche Aéronautique No. 56 (1957), S. 3.
[10] *D. I. Marsden*, *R. W. Simpson* u. *W. I. Rainbird*, The flow over delta wings at low speeds with leading edge separation. The College of Aeronautics, Cranfield, Report No. 114 (1958).

eine reibungslose Modellströmung wiederzugeben. Die Kuttasche Abflußbedingung bei Unterschallhinterkanten ist das bekannteste Beispiel für einen Reibungseffekt, der trotzdem in der reibungslosen Betrachtungsweise berücksichtigt wird.

In der linearen Tragflügeltheorie ist es üblich, einen gegebenen Tragflügel zu ersetzen durch eine große Anzahl von Elementarflügeln der infinitesimalen Spannweite $dy$ (Abb. 5b). Dieser Elementarflügel hat eine über der Tiefe veränderliche Zirkulationsverteilung und nach hinten abgehende freie Wirbel, die jedoch in der Flügelebene liegen (Abb. 5a). Dieses bekannte klassische Wirbelmodell wird jetzt dahingehend abgeändert, daß für die Elementarflügel das Bollaysche Wirbelmodell zugrunde gelegt wird. Die freien Wirbel liegen jetzt also nicht mehr in der Flügelebene, sondern unter dem Winkel $\alpha/2$ zu dieser (Abb. 5c). Bei dem Gesamtflügel geht dann von

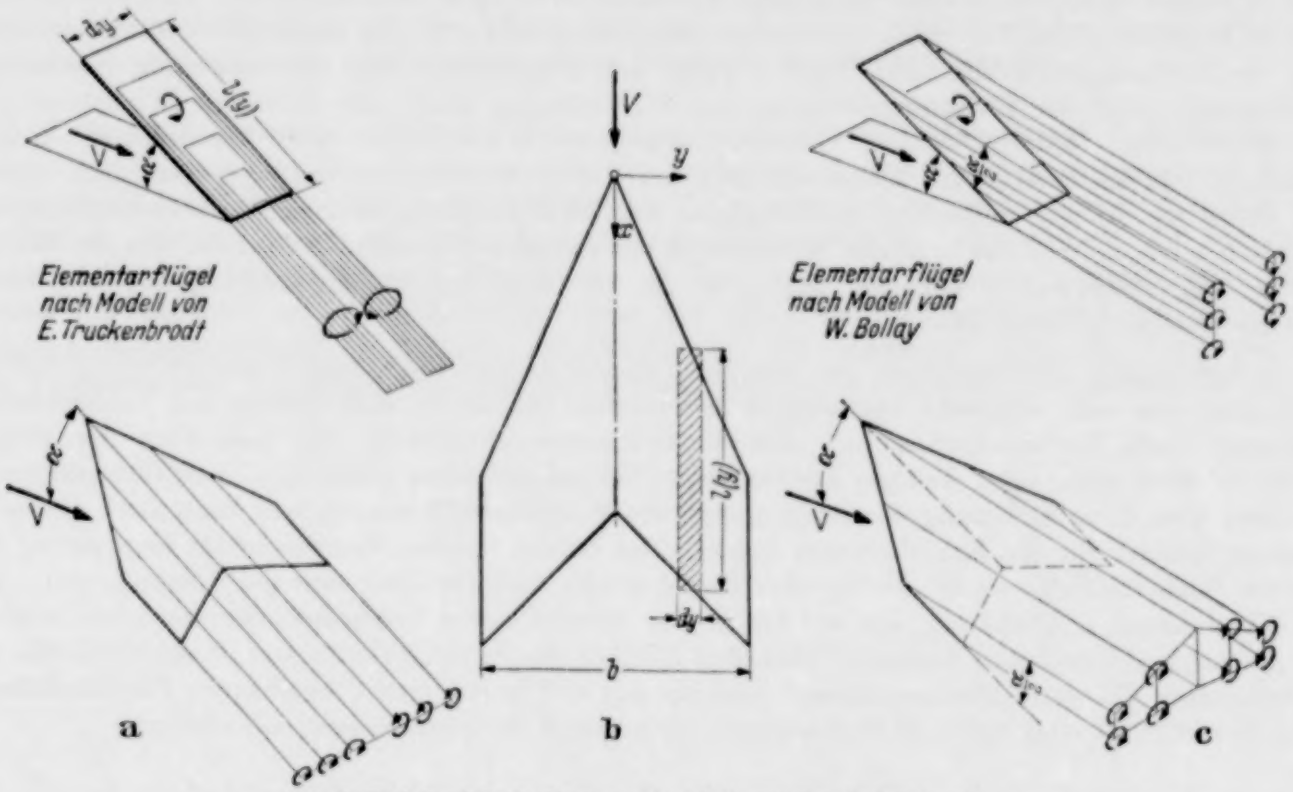



Abb. 5. Wirbelmodelle für lineare und nichtlineare Tragflächentheorie. —
a) Lineare Theorie; b) Aufteilung des Flügels in Elementarflügel; c) Nichtlineare Theorie.

jedem Punkt der Flügelfläche, in der eine Änderung der Wirbelstärke vorliegt, ein freier Wirbel unter dem Winkel $\alpha/2$ nach hinten ab. Da dieser Winkel mit abnehmendem Anstellwinkel kleiner wird, geht die ganze Wirbelanordnung im Grenzfall $\alpha \to 0$ in das übliche Wirbelmodell der linearen Theorie über. Die Hauptaufgabe besteht jetzt darin, für das so definierte Wirbelmodell die induzierten Geschwindigkeiten an der Flügelfläche zu ermitteln. Damit lassen sich dann die kinematischen Strömungsbedingungen aufstellen, welche die Bestimmungsgleichungen für die Wirbelverteilung liefern. Die kinematische Strömungsbedingung verlangt, daß die Richtung der resultierenden Geschwindigkeit, die sich aus der Grundströmung und der induzierten Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle zusammensetzt, tangential zur Flügelfläche verläuft. Da die Horizontalkomponente der induzierten Geschwindigkeit klein ist gegen die Anströmungsgeschwindigkeit, ist der Winkel der resultierenden Geschwindigkeit gleich dem induzierten Abwindwinkel $\alpha_w = -w/V$, wenn $w$ die Vertikalkomponente der induzierten Geschwindigkeit darstellt. Die kinematische Strömungsbedingung besagt danach, daß der induzierte Abwindwinkel gleich dem örtlichen Anstellwinkel des Tragflügels sein muß, d. h. die kinematische Strömungsbedingung fordert:

$$\alpha_w = \alpha_{\text{örtl}} \,. \tag{3}$$

Belegt man die Tragflügelfläche mit einer kontinuierlichen Wirbelbelegung $k(x, y)$ [m/sek.], dann ergibt sich nach der linearen Theorie für den induzierten Anstellwinkel auf der Flügelfläche[1]

$$\alpha_w = L_1(k) \,, \tag{4}$$

[1] *K. Gersten*, Jahrbuch 1957 der Wiss. Ges. f. Luftfahrt, S. 172.

und damit lautet die kinematische Strömungsbedingung

$$\alpha_{örtl} = L_1(k) \quad \text{(lineare Theorie)}. \tag{5}$$

Dabei ist $L_1(k)$ ein linearer Operator mit folgenden Eigenschaften:

$$L_1(c\,k) = c\,L_1(k), \qquad L_1(k_1 + k_2) = L_1(k_1) + L_1(k_2). \tag{6}$$

Im allgemeinen Fall der tragenden Fläche ist dieser Operator ein kompliziertes Doppelintegral, das sich über die Flügelfläche erstreckt. Geht man nun zu dem beschriebenen nichtlinearen Wirbelmodell über, so erweitert sich die Gleichung (4) um ein additives Zusatzglied, welches nun auch vom Anstellwinkel abhängt. Entwickelt man dieses Zusatzglied nach Potenzen von $\alpha$, so ergibt sich für den induzierten Anstellwinkel in der Flügelebene anstelle von (4) jetzt

$$\alpha_w = L_1(k) + \frac{\alpha}{|\alpha|}\alpha\,L_2(k) + \cdots. \tag{7}$$

Dabei hat $L_2$ ebenfalls die Eigenschaften (6). Die kinematische Strömungsbedingung (3) führt damit zu der folgenden Bestimmungsgleichung für die Zirkulationsverteilung $k$:

$$\alpha_{örtl} = L_1(k) + \frac{\alpha}{|\alpha|}\alpha\,L_2(k) + \cdots. \quad \text{(nichtlineare Theorie)}. \tag{8}$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt durch den Ansatz

$$k = k_1\,\alpha + k_2\frac{\alpha}{|\alpha|}\alpha^2, \tag{9}$$

wobei $k_1$ den linearen und $k_2$ den nichtlinearen Anteil der Zirkulationsverteilung darstellt. Man erhält dann unter Benutzung der Beziehungen (6) die beiden Gleichungen

$$L_1(k_1) = \frac{\alpha_{örtl}}{\alpha}, \tag{10}$$

$$L_1(k_2) = -\frac{\alpha_{örtl}}{\alpha}L_2(k_1). \tag{11}$$

Die Gleichung (10) für $k_1$ ist identisch mit dem Problem (5) der linearen Theorie. Den nichtlinearen Anteil $k_2$ erhält man aus der ganz analog gebauten Gleichung (11), die sich von (10) nur durch die veränderte rechte Seite unterscheidet. Hat man aus (10) die Funktion $k_1$ ermittelt, so läßt sich in sehr einfacher Weise die rechte Seite von (11) bilden. Es stellt sich nämlich heraus, daß der Operator $L_2(k)$ viel einfachere Gestalt hat als $L_1(k)$.

Sind die Funktionen $k_1$ und $k_2$ ermittelt, so erhält man daraus für die Kraftbeiwerte $c_A$ und $c_M$ die folgenden Beziehungen:

$$c_A = c_N = \frac{2}{F\,V}\int_F\int k(x, y)\,dx\,dy, \tag{12}$$

$$c_M = -\frac{2}{F\,l_\mu\,V}\int_F\int x\,k(x, y)\,dx\,dy. \tag{13}$$

wobei $F$ die Flügelfläche, $V$ die Anströmgeschwindigkeit, ferner

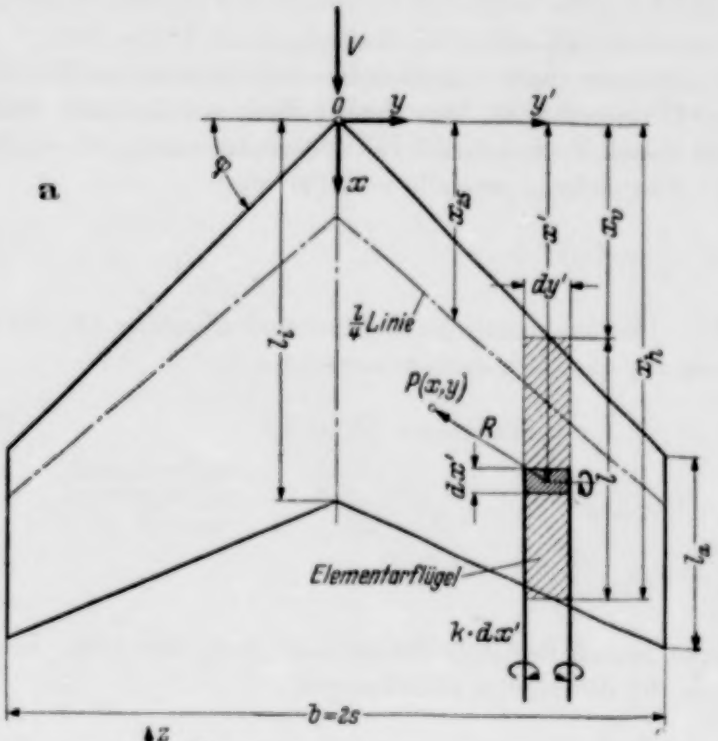
$$l_\mu = \frac{1}{F}\int_{-s}^{+s} l^2(y)\,dy$$

die Bezugstiefe mit der örtlichen Flügeltiefe $l(y)$ und $s$ die Halbspannweite bedeuten.

Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten, d. h. die Bestimmung der Ausdrücke $L_1(k)$ und $L_2(k)$, hängt nun davon ab, von welchem Berechnungsverfahren der linearen Theorie man ausgeht. Für das Tragflächenverfahren von *E. Truckenbrodt* werden im folgenden die Berechnungsformeln im einzelnen aufgestellt.

**5. Das Berechnungsverfahren.** a) Lineare Tragflächentheorie von *E. Truckenbrodt*. Das Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung von *E. Truckenbrodt* kann auf Tragflügel mit beliebigem Grundriß angewendet werden. Die Flügelfläche wird dabei mit der kontinuierlichen

Wirbeldichte $k(x', y')$ belegt. Das bedeutet, daß von jedem Punkt der Flügelfläche ein elementarer Hufeisenwirbel der Stärke $k(x', y')\,dx'$ abgeht (vgl. Abb. 6a). Alle Hufeisenwirbel, die bei der Linie $x' = \text{const.}$ beginnen, bilden eine ebene Wirbelschicht mit der Zirkulationsverteilung $k(x', y')\,dx'$, die nach (76) des Abschn. 7 im Punkt $P(x, y, 0)$ die folgende Geschwindigkeit in $z$-Richtung induziert:




$$dw(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-s}^{+s} \frac{\dfrac{d}{dy'}\left[k(x', y')\left(1 + \dfrac{x - x'}{R}\right)\right]}{y - y'} \times dx'\, dy' . \tag{14}$$

Dabei ist

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} . \tag{15}$$

Abb. 6. Bezeichnungen am Pfeilflügel (Tragflächentheorie von *E. Truckenbrodt*). — a) Grundriß; b) räumliche Darstellung (von dem abgehenden Wirbelband ist nur eine infinitesimale Wirbelschicht eingezeichnet).

Den vom gesamten Tragflügel induzierten Abwindwinkel $\alpha_w = -w/V$ erhält man daraus, indem man über die Wirbelschichten, die jeweils bei $x'$ beginnen, in Tiefenrichtung, d. h. in $x'$-Richtung, integriert. Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich dann

$$\alpha_w(k) = -\frac{w}{V} = +\frac{1}{4\pi V} \oint_{-s}^{+s} \int_{x_v}^{x_h} \frac{\dfrac{d}{dy'}\left[k(x', y')\left(1 + \dfrac{x - x'}{R}\right)\right]}{y - y'} dx'\, dy' . \tag{16}$$

Dabei sind $x_v(y')$ die Abszisse der Vorderkante und $x_h(y') = x_v(y') + l(y')$ die der Hinterkante.

Für die Wirbelverteilung $k(x, y)$ wird jetzt der folgende Ansatz gewählt:

$$k(\varphi, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \frac{b\,V}{l(\vartheta)} \left[\gamma(\vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + 4\,\mu(\vartheta)\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi\right)\right] \tag{17}$$

mit

$$\frac{1}{2}(1 - \cos \varphi) = \frac{x' - x_v(y')}{l(y')} \tag{18}$$

und

$$\cos \vartheta = \eta' = \frac{y'}{s} . \tag{19}$$

Die Verteilung der Wirbeldichte in Tiefenrichtung für einen festen Flügelschnitt $y' = \text{konst.}$ entspricht den beiden ersten Birnbaumschen Normalverteilungen. Die Stärke der jeweiligen Tiefenverteilung ändert sich längs der Spannweite. Sie wird durch die Zirkulationsverteilung $\gamma(\vartheta)$ bzw. die Momentenverteilung $\mu(\vartheta)$ bestimmt. Statt der kontinuierlichen Verteilung $k(x, y)$ werden nur noch die beiden Funktionen $\gamma(\vartheta)$ und $\mu(\vartheta)$ gesucht.

Setzt man (17) in (16) ein, so erhält man bei Verwendung der dimensionslosen Koordinaten

$$\xi = \frac{x}{s}, \qquad \eta = \frac{y}{s}, \qquad \xi' = \frac{x'}{s}, \qquad \eta' = \frac{y'}{s} \tag{20}$$

den induzierten Anstellwinkel zu

$$\alpha_w(\xi, \eta) = -\frac{w}{V} = L(\gamma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\frac{d}{d\eta'}(i\gamma + j\mu)}{\eta - \eta'} d\eta' . \tag{21}$$

Dabei wurden die beiden Einflußfunktionen

$$i(X, Y) = \frac{2}{\pi l} \int_{x_v}^{x_h} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{x - x'}{R}\right) dx' , \tag{22}$$

$$j(X, Y) = \frac{8}{\pi l} \int_{x_v}^{x_h} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi\right) \left(1 + \frac{x - x'}{R}\right) dx' , \tag{23}$$

mit

$$X = \frac{x - x_v(y')}{l(y')}, \qquad Y = \frac{y - y'}{l(y')} \tag{24}$$

eingeführt.

Die kinematische Strömungsbedingung ergibt sich aus (21) zu

$$\alpha(\xi, \eta) = L(\gamma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\frac{d}{d\eta'}(i\gamma + j\mu)}{\eta - \eta'} d\eta' . \tag{25}$$

Da zwei Funktionen $\gamma(\eta)$ und $\mu(\eta)$ gesucht werden, muß die Bedingung (25) auch auf zwei verschiedenen, besonders geeigneten Anstellinien auf dem Flügel erfüllt werden. Bei *E. Truckenbrodt* sind dafür die Hinterkante (durch einen Stern gekennzeichnet) und die $l/4$-Linie (durch zwei Sterne gekennzeichnet) gewählt worden. Man erhält daher das Gleichungssystem

$$\alpha^*(\eta) = L^*(\gamma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\frac{d}{d\eta'}(i^* \gamma + j^* \mu)}{\eta - \eta'} d\eta' \quad \text{(Hinterkante)}, \tag{26}$$

$$\alpha^{**}(\eta) = L^{**}(\gamma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\frac{d}{d\eta'}(i^{**} \gamma + j^{**} \mu)}{\eta - \eta'} d\eta' \quad (l/4\text{-Linie}) . \tag{27}$$

Setzt man nach dem Vorbild von *H. Multhopp* für die unter den Integralen stehenden Funktionen $i^* \gamma$, $i^{**} \gamma$, $j^* \mu$, $j^{**} \mu$ Sinusreihen an, so lassen sich die Integrale durch geeignete Summenformeln ausdrücken. Werden die Ansätze $\gamma = g_1 \alpha$, $\mu = m_1 \alpha$ gemacht, dann erhält man nach *Truckenbrodt* aus (26) und (27)

$$a_{\nu\nu} \frac{\alpha_\nu^*}{\alpha} = \left[2 + b_\nu \left(\frac{s}{l_\nu}\right)^{3/2}\right] g_{1\nu} - \sum_{n=1}^{m}{}' a_{\nu n} i_{\nu n}^* g_{1n} - 12\, b_\nu \left(\frac{s}{l_\nu}\right)^{3/2} m_{1\nu} - \sum_{n=1}^{m}{}' a_{\nu n} j_{\nu n}^* m_{1n} , \tag{28}$$

$$a_{\nu\nu} \frac{\alpha_\nu^{**}}{\alpha} = \left[1{,}2180 + c_\nu \left(\frac{s}{l_\nu}\right)^2\right] g_{1\nu} - \sum_{n=1}^{m}{}' a_{\nu n} i_{\nu n}^{**} g_{1n} + \left[3{,}3006 + 6\, c_\nu \left(\frac{s}{l_\nu}\right)^2\right] m_{1\nu} - \sum_{n=1}^{m}{}' a_{\nu n} j_{\nu n}^{**} m_{1n} . \tag{29}$$

$$(\nu = 1, 2 \ldots m)$$

Dabei sind die $a_{\nu n}$, $a_{\nu\nu}$, $b_\nu$ und $c_\nu$ universelle, von *Truckenbrodt* tabulierte Konstante. Die $g_{1n}$ und $m_{1n}$ bzw. $g_{1\nu}$ und $m_{1\nu}$ sind die Funktionswerte an den Stellen

$$\eta_n = \cos \frac{n\pi}{m+1} \quad \text{bzw.} \quad \eta_\nu = \frac{\cos \nu \pi}{m+1} . \tag{30}$$

Die Zahlen $l_\nu$ sind die Flügeltiefen an diesen Stellen. Weiterhin bezeichnet $m$ die Anzahl der gewählten Elementarflügel längs der Spannweite. Der Strich am Summenzeichen deutet darauf hin, daß bei der Summation das $\nu$-te Glied ausgelassen werden soll.

Die Gleichungen (28) und (29) stellen ein gekoppeltes lineares Gleichungssystem für die $2m$ Unbekannten $g_{1\nu}$ und $m_{1\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ dar. Sind diese Werte gefunden, so erhält man daraus die aerodynamischen Beiwerte, wie folgt:

$$\left(\frac{dc_A}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = A \int_{-1}^{+1} g_1(\eta)\, d\eta\,, \tag{31}$$

$$\left(\frac{dc_M}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = -A \int_{-1}^{+1} g_1(\eta)\, \frac{x_{25}(\eta)}{l_\mu}\, d\eta + A \int_{-1}^{+1} m_1(\eta)\, \frac{l(\eta)}{l_\mu}\, d\eta\,, \tag{32}$$

wobei

$$l_\mu = \frac{1}{F} \int_{-s}^{+s} l^2\, dy \tag{33}$$

ist. Auch für diese Integrale lassen sich einfache Summenformeln angeben, wenn man die folgenden Quadraturformeln verwendet:

$$\int_{-1}^{+1} f(\eta)\, d\eta = \frac{\pi}{m+1} \sum_{n=1}^{m} f(\eta_n) \sin\frac{n\pi}{m+1}\,, \tag{34}$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\frac{df}{d\eta'}}{\eta - \eta'}\, d\eta' = \frac{1}{a_{\nu\nu}} \left(f_\nu - \sum_{n=1}^{m}{}' a_{\nu n} f_n\right). \tag{35}$$

b) Berechnung der Auftriebsverteilung für den nichtlinearen Anstellwinkelbereich. Wie schon in Abschn. 4 ausgeführt wurde, besteht der Unterschied zwischen der nichtlinearen und der linearen Theorie nur in einer Abänderung des Wirbelmodelles. Gegenüber dem Modell der linearen Theorie, bei dem alle abgehenden freien Wirbel in einer Ebene, der Flügelebene, liegen, bilden beim Modell der nichtlinearen Theorie die abgehenden freien Wirbel den Winkel $\alpha/2$ mit der Flügelebene (vgl. Abb. 6b). Es seien nun alle elementaren Hufeisenwirbel betrachtet, die ihren Ursprung bei der Koordinate $x'$ haben. Wie in Abb. 6b angedeutet, bilden sie zusammen eine ebene Wirbelschicht mit der Wirbelverteilung $k(x', y')\, dx'$ längs der Spannweitenkoordinate $y'$. Der Punkt $P(x, y)$ der Flügelfläche hat von dieser Schicht den Abstand $z = -(x - x')\,\alpha/2$. In Abschn. 7, Gleichung (80), wird gezeigt, daß im Punkt $P(x, y)$ von der bei $x'$ beginnenden Wirbelschicht die folgende Abwindgeschwindigkeit induziert wird:

$$dw = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-s}^{+s} \frac{\frac{d}{dy'}\left[k(x', y')\left(1 + \frac{x - x'}{R}\right)\right]}{y - y'}\, dy'\, dx' - \frac{1}{8}\,\frac{\alpha}{|\alpha|}\,\alpha \left(1 + \frac{x - x'}{|x - x'|}\right)(x - x')\, \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x', y)\, dx'\,. \tag{36}$$

Führt man jetzt die Integration über den gesamten Flügel von der Flügelnase bis zur Hinterkante durch, dann erhält man für den gesamten induzierten Abwindwinkel in $P\,(x, y, z = -(\alpha/2)\, x)$ nach Vertauschen von Integration und Differentiation

$$w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-s}^{+s} \int_{x_v}^{x_h} \frac{\frac{d}{dy'}\left[k(x', y')\left(1 + \frac{x - x'}{R}\right)\right]}{y - y'}\, dx'\, dy' - \frac{1}{8}\,\frac{\alpha}{|\alpha|}\,\alpha\, \frac{\partial}{\partial y^2} \int_{x_v}^{x_h} \left(1 + \frac{x - x'}{|x - x'|}\right)(x - x')\, k(x', y)\, dx'\,. \tag{37}$$

Benutzt man wieder denselben Ansatz (17) für $k(x', y')$ und führt man die dimensionslosen Koordinaten (20) ein, so erhält man für die kinematische Strömungsbedingung:

$$\alpha(\xi, \eta) = L(\gamma, \mu) + \frac{\alpha}{|\alpha|}\,\alpha\, \frac{d^2 J(\gamma, \mu)}{d\eta^2}\,. \tag{38}$$

Dabei sind $L(\gamma,\mu)$ und $J(\gamma,\mu)$ lineare Operatoren mit den Eigenschaften (6). $L(\gamma,\mu)$ ist identisch mit dem Operator (25) der linearen Theorie. Für $J(\gamma,\mu)$ gilt

$$J(\gamma,\mu)=\frac{1}{\pi}\frac{l(\eta)}{b}\left[\gamma(\eta)\,J_1(\eta)+4\,\mu(\eta)\,J_2(\eta)\right], \tag{39}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} J_1(\eta)&=\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}(1+\cos\varphi')(\cos\varphi'-\cos\varphi)\,d\varphi' \\ J_2(\eta)&=\frac{1}{2}\int_0^{\varphi}(1+\cos\varphi'-2\sin^2\varphi')(\cos\varphi'-\cos\varphi)\,d\varphi', \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_v}{l}&=\frac{1}{2}(1-\cos\varphi), \\ \frac{x'-x_v}{l}&=\frac{1}{2}(1-\cos\varphi') \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

gilt. Zweimalige Differentiation von $J(\gamma,\mu)$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{d^2J}{d\eta^2}=f_1(\gamma,\mu)&+f_2(\gamma,\mu)\frac{dl}{dy}+f_3(\gamma,\mu)\frac{dx_v}{dy}+f_4(\gamma,\mu)\frac{dl}{dy}\frac{dx_v}{dy} \\ &+f_5(\gamma,\mu)\left(\frac{dl}{dy}\right)^2+f_6(\gamma,\mu)\left(\frac{dx_v}{dy}\right)^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Dabei geben die Glieder mit $dl/dy$ den Einfluß der Zuspitzung des Flügels und die Glieder mit $dx_v/dy$ den Einfluß der Pfeilung des Flügels wieder. Die Operatoren $f_1(\gamma,\mu)$ bis $f_6(\gamma,\mu)$ ergeben sich dabei durch elementare Integrationen und Differentiationen. Bezeichnen wieder ein Stern die Werte für die Hinterkante und zwei Sterne diejenigen für die $l/4$-Linie, so gelten die folgenden Formeln:

für die Hinterkante

$$\left.\begin{aligned} f_1^*(\gamma,\mu)&=\frac{3}{4}\frac{l}{b}\frac{d^2\gamma}{d\eta^2}+\frac{l}{b}\frac{d^2\mu}{d\eta^2}, \\ f_2^*(\gamma,\mu)&=-\frac{1}{4}\frac{d\gamma}{d\eta}+\frac{d\mu}{d\eta}, \\ f_3^*(\gamma,\mu)&=-\frac{d\gamma}{d\eta}, \\ f_4^*(\gamma,\mu)&=0, \\ f_5^*(\gamma,\mu)&=0, \\ f_6^*(\gamma,\mu)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

für die $l/4$-Linie

$$\left.\begin{aligned} f_1^{**}(\gamma,\mu)&=\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}\frac{l}{b}\frac{d^2\gamma}{d\eta^2}+\frac{1}{3}\frac{l}{b}\frac{d^2\mu}{d\eta^2}, \\ f_2^{**}(\gamma,\mu)&=-\left(\frac{\sqrt{3}}{16\pi}-\frac{1}{12}\right)\frac{d\gamma}{d\eta}-\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}-\frac{1}{3}\right)\frac{d\mu}{d\eta}, \\ f_3^{**}(\gamma,\mu)&=-\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)\frac{d\gamma}{d\eta}-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\frac{d\mu}{d\eta}, \\ f_4^{**}(\gamma,\mu)&=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\frac{b}{l}\gamma, \\ f_5^{**}(\gamma,\mu)&=\frac{\sqrt{3}}{32\pi}\frac{b}{l}\gamma, \\ f_6^{**}(\gamma,\mu)&=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{b}{l}\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Da die Funktionen $\gamma$ und $\mu$ im allgemeinen durch ihre Funktionswerte $\gamma_n$ und $\mu_n$ an den $m$ diskreten Stellen $\eta_n = \cos[n\pi/(m+1)]$ $(n = 1, \ldots, m)$ gegeben sind, lassen sich die erforderlichen ersten und zweiten Ableitungen mittels folgender Summenformeln bestimmen:

$$\frac{df}{d\eta} = \sum_{n=1}^{m} A_{1n} f_n , \tag{45}$$

$$\frac{d^2f}{d\eta^2} = \sum_{n=1}^{m} A_{2n} f_n . \tag{46}$$

Die universellen Summenkoeffizienten $A_{1n}$ und $A_{2n}$ sind für $m = 7$ und $m = 15$ in den Tabellen 1 bis 4 tabuliert worden.

Zur Bestimmung der gesuchten Zirkulationsverteilung $\gamma$ und Momentenverteilung $\mu$ wird nun die kinematische Strömungsbedingung (38) nach dem Vorbild der linearen Theorie auf der $l/4$-Linie (zwei Sterne) und der Hinterkante (ein Stern) erfüllt. Es ergeben sich dann aus (38) die folgenden beiden Bestimmungsgleichungen für $\gamma(\eta)$ und $\mu(\eta)$:

$$\alpha^*(\eta) = L^*(\gamma, \mu) + \frac{\alpha}{|\alpha|} \mathfrak{a} \frac{d^2 J^*(\gamma, \mu)}{d\eta^2} \qquad \text{(Hinterkante)} , \tag{47}$$

$$\alpha^{**}(\eta) = L^{**}(\gamma, \mu) + \frac{\alpha}{|\alpha|} \mathfrak{a} \frac{d^2 J^{**}(\gamma, \mu)}{d\eta^2} \qquad (l/4\text{-Linie}) . \tag{48}$$

Tabelle 1. *Summenkoeffizienten $A_{1n}$ nach Gl. (45) für $m = 7$.*

| $n$ | $\eta_n$ \ $\eta$ | 0 | 0,3827 | 0,7071 | 0,9239 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9239 | 0,4142 | —0,7654 | 2,4966 | 3,1544 |
| 2 | 0,7071 | —1,0 | 2,2992 | 0,7072 | —8,5238 |
| 3 | 0,3827 | 2,4142 | 0,2242 | —4,0274 | 4,4608 |
| 4 | 0 | 0 | —2,8286 | 2,0000 | —2,8284 |
| 5 | —0,3827 | —2,4142 | 1,3066 | —1,1990 | 1,8478 |
| 6 | —0,7071 | 1,0 | —0,7024 | 0,7072 | —1,1330 |
| 7 | —0,9239 | —0,4142 | 0,3170 | —0,3318 | 0,5412 |

Tabelle 2. *Summenkoeffizienten $A_{1n}$ nach Gl. (45) für $m = 15$.*

| $n$ | $\eta_n$ \ $\eta$ | 0 | 0,1951 | 0,3827 | 0,5556 | 0,7071 | 0,8315 | 0,9239 | 0,9808 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9808 | 0,1990 | —0,2530 | 0,3530 | —0,5518 | 1,0082 | —2,3516 | 8,9574 | 12,8848 |
| 2 | 0,9239 | —0,4142 | 0,5354 | —0,7654 | 1,2496 | —2,4966 | 7,4540 | 3,1542 | —34,4610 |
| 3 | 0,8315 | 0,6682 | —0,8902 | 1,3400 | —2,4218 | 6,3180 | 1,3470 | —15,7096 | 19,0720 |
| 4 | 0,7071 | —1,0 | 1,4080 | —2,3592 | 5,6120 | 0,7072 | —10,2346 | 8,5238 | —13,2442 |
| 5 | 0,5556 | 1,4966 | —2,3518 | 5,2058 | 0,4018 | —7,7596 | 5,4246 | —5,8990 | 10,0232 |
| 6 | 0,3827 | —2,4142 | 5,0212 | 0,2242 | —6,4272 | 4,0274 | —3,7054 | 4,4608 | — 7,9178 |
| 7 | 0,1951 | 5,0274 | 0,1014 | —5,6588 | 3,2722 | —2,7090 | 2,7740 | —3,5166 | 6,3986 |
| 8 | 0 | 0 | —5,2262 | 2,8286 | —2,1648 | 2,0000 | —2,1648 | 2,8284 | — 5,2262 |
| 9 | —0,1951 | —5,0274 | 2,5630 | —1,8374 | 1,5714 | —1,5374 | 1,7198 | —2,2904 | 4,2754 |
| 10 | —0,3827 | 2,4142 | —1,6304 | 1,3066 | —1,1842 | 1,1990 | —1,3696 | 1,8478 | — 3,4732 |
| 11 | —0,5556 | —1,4966 | 1,1294 | —0,9592 | 0,9000 | —0,9312 | 1,0790 | —1,4686 | 2,7740 |
| 12 | —0,7071 | 1,0 | —0,7992 | 0,7024 | —0,6736 | 0,7072 | —0,8272 | 1,1330 | — 2,1474 |
| 13 | —0,8315 | —0,6682 | 0,5518 | —0,4952 | 0,4818 | —0,5106 | 0,6014 | —0,8270 | 1,5714 |
| 14 | —0,9239 | 0,4142 | —0,3488 | 0,3170 | —0,3110 | 0,3318 | —0,3924 | 0,5412 | — 1,0298 |
| 15 | —0,9808 | —0,1990 | 0,1692 | —0,1548 | 0,1528 | —0,1634 | 0,1738 | —0,2676 | 0,5098 |

Tabelle 3. *Summenkoeffizienten $A_{2n}$ nach Gl. (46) für $m = 7$.*

| $n$ | $\eta_n$ \ $\eta$ | 0 | 0,3827 | 0,7071 | 0,9239 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9239 | 0,8968 | — 3,1718 | 15,9588 | —103,6032 |
| 2 | 0,7071 | — 2,8284 | 15,6018 | —25,0004 | 24,8700 |
| 3 | 0,3827 | 12,6174 | —24,4024 | 8,5256 | 11,6590 |
| 4 | 0 | —21,0000 | 13,5142 | —2,8284 | — 11,7216 |
| 5 | —0,3827 | 12,6174 | — 2,8284 | 11,1114 | 8,8288 |
| 6 | —0,7071 | — 2,8284 | 0,9740 | —15,0002 | — 5,7578 |
| 7 | —0,9239 | 0,8968 | 0,3432 | 10,5444 | 2,8286 |

Tabelle 4. *Summenkoeffizienten $A_{2n}$ nach Gl. (46)* für $m = 15$.

| $n$ | $\eta_n$ \ $\eta$ | 0 | 0,1951 | 0,3827 | 0,5556 | 0,7071 | 0,8315 | 0,9239 | 0,9808 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9808 | 0,4056 | — 0,6958 | 1,8054 | 4,5940 | 8,7930 | — 21,8362 | 371,3938 | —1569,2914 |
| 2 | 0,9239 | — 0,8968 | 1,5780 | — 4,7588 | — 3,0038 | — 26,5648 | 181,4036 | —540,6458 | 323,2198 |
| 3 | 0,8315 | 1,6072 | — 2,9778 | 9,0586 | — 11,8702 | 110,5352 | —268,1322 | 240,9128 | 236,0254 |
| 4 | 0,7071 | — 2,8284 | 5,7854 | —17,1472 | 78,5826 | —167,9976 | 137,0206 | — 24,8700 | — 244,4994 |
| 5 | 0,5556 | 5,3876 | —13,5242 | 61,2484 | —129,9428 | 91,4382 | — 24,7094 | — 5,1870 | 211,1428 |
| 6 | 0,3827 | —12,6174 | 54,5522 | —95,6066 | 79,9826 | — 19,1318 | 6,5300 | 11,6640 | — 177,5580 |
| 7 | 0,1951 | 51,5388 | —88,3206 | 54,4708 | — 23,1596 | 6,7508 | — 1,2444 | — 12,5380 | 148,6024 |
| 8 | 0 | —85,0000 | 52,5168 | —13,5134 | 6,0540 | — 2,8284 | — 0,6256 | 11,7216 | — 124,0242 |
| 9 | —0,1951 | 51,5388 | —12,6172 | 8,8596 | 5,0688 | 1,2338 | 1,2830 | — 10,3552 | 102,9086 |
| 10 | —0,3827 | —12,6174 | 5,3130 | — 6,6018 | — 9,2216 | — 0,5046 | — 1,4346 | 8,8288 | — 84,4126 |
| 11 | —0,5556 | 5,3876 | — 2,7798 | 2,9180 | 6,7362 | 0,1578 | 1,3510 | — 7,2782 | 67,8734 |
| 12 | —0,7071 | — 2,8284 | 1,6094 | 0,5722 | 0,5258 | 0 | — 1,1528 | 5,7578 | — 52,8010 |
| 13 | —0,8315 | 1,6072 | — 0,9632 | — 1,8930 | — 7,9404 | — 0,0586 | 0,8966 | — 4,2750 | 38,7770 |
| 14 | —0,9239 | — 0,8968 | 0,5526 | 1,2434 | 10,9652 | 0,0624 | — 0,6100 | 2,8286 | — 25,4718 |
| 15 | —0,9808 | 0,4056 | — 0,2534 | — 0,3092 | — 7,7088 | — 0,0378 | 0,3088 | — 1,4084 | 12,6196 |

Dabei sind die Operatoren $L^*(\gamma, \mu)$ und $L^{**}(\gamma, \mu)$ identisch mit (26) und (27) der linearen Theorie Die Werte $d^2J^*/d\eta^2$ und $d^2J^{**}/d\eta^2$ ergeben sich nach (42) aus den in (43) und (44) angegebenen Funktionen.

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\eta) &= g_1(\eta)\,\alpha + g_2(\eta)\,\frac{\alpha}{|\alpha|}\,\alpha^2\,, \\ \mu(\eta) &= m_1(\eta)\,\alpha + m_2(\eta)\,\frac{\alpha}{|\alpha|}\,\alpha^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Geht man damit in die Gleichungen (47) und (48) ein und benutzt die Beziehung

$$L(c_1\,g_1 + c_2\,g_2\,,\qquad c_1\,m_1 + c_2\,m_2) = c_1\,L(g_1, m_1) + c_2\,L(g_2, m_2)\,, \tag{49a}$$

so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder, die von der dritten Potenz des Anstellwinkels abhängen,

$$L^*(g_1, m_1) = \frac{\alpha^*(\eta)}{\alpha}\,,\qquad L^{**}(g_1, m_1) = \frac{\alpha^{**}(\eta)}{\alpha} \tag{50}$$

und

$$L^*(g_2, m_2) = -\frac{\alpha^*(\eta)}{\alpha}\,\frac{d^2J^*(g_1, m_1)}{d\eta^2}\,,\; L^{**}(g_2, m_2) = -\frac{\alpha^{**}(\eta)}{\alpha}\,\frac{d^2J^{**}(g_1, m_1)}{d\eta^2}\,. \tag{51}$$

Da die Operatoren $L^*$ und $L^{**}$ nach (26) und (27) Integrale über die gesuchten Funktionen sind, stellen die Gleichungen (50) zwei gekoppelte Integralgleichungen für die unbekannten Funktionen $g_1$ und $m_1$ dar. Bestimmt man mit diesen Lösungen die rechten Seiten von Gl. (51), so ergeben sich entsprechend zwei gekoppelte Integralgleichungen für die Funktionen $g_2$ und $m_2$. Die Gleichungen (50) sind identisch mit den Gleichungen (26) und (27) der ebenen Theorie. Die Gleichungen (51) sind ganz genauso aufgebaut, lediglich die rechten Seiten sind geändert. Man erhält aus den ersten beiden Gleichungen (50) die Funktionen $g_1(\eta)$ und $m_1(\eta)$. Mit diesen errechnet man die rechten Seiten der Gleichungen (51) und kann dann im zweiten Rechenschritt die Funktionen $g_2(\eta)$ und $m_2(\eta)$ bestimmen.

Statt diese Integralgleichungen zu lösen, begnügt man sich in der Praxis damit, die gesuchten Funktionen nur an einer endlichen Zahl diskreter Stellen $m$ zu ermitteln, d. h. die kinematische Strömungsbedingung wird statt längs der ganzen Spannweite nur an $m$ diskreten Punkten erfüllt. Man erhält dann statt der beiden gekoppelten Integralgleichungen ein lineares Gleichungssystem für die $2\,m$ Unbekannten $g_{1\nu}$, $m_{1\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots m)$ bzw. $g_{2\nu}$, $m_{2\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots m)$. Wie schon bei der Darstellung der linearen Theorie erwähnt, erhält man dann statt (50) das lineare Gleichungssystem (28) und (29). Ganz analog ist das Gleichungssystem für die $g_{2\nu}$, $m_{2\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots m)$ aufgebaut.

c) Berechnung der aerodynamischen Beiwerte. Aus den ermittelten Funktionen $g_1, g_2, m_1, m_2$ erhält man für die aerodynamischen Beiwerte

$$c_A = \left(\frac{dc_A}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + C_1 \frac{\alpha}{|\alpha|} \alpha^2 , \qquad c_M = \left(\frac{dc_M}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + C_2 \frac{\alpha}{|\alpha|} \alpha^2 \tag{52}$$

die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dc_A}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} &= \Lambda \int_{-1}^{+1} g_1(\eta)\, d\eta , \\ \left(\frac{dc_M}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} &= -\Lambda \int_{-1}^{+1} g_1(\eta) \frac{x_{25}(\eta)}{l_\mu} d\eta + \Lambda \int_{-1}^{+1} m_1(\eta) \frac{l(\eta)}{l_\mu} d\eta , \\ C_1 &= \Lambda \int_{-1}^{+1} g_2(\eta)\, d\eta , \\ C_2 &= -\Lambda \int_{-1}^{+1} g_2(\eta) \frac{x_{25}(\eta)}{l_\mu} d\eta + \Lambda \int_{-1}^{+1} m_2(\eta) \frac{l(\eta)}{l_\mu} d\eta . \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Auch hier lassen sich die Integrale wieder durch geeignete Quadraturformeln ausdrücken [vgl. (34) und (35)]. Für den induzierten Widerstand gilt bei scharfer Vorderkante nach (2)

$$c_{Wi} = c_A \alpha . \tag{54}$$

**6. Beispielrechnungen und Vergleich von Theorie und Experiment.** Nach dem geschilderten Verfahren wurden für einige Flügelserien die Auftriebsverteilungen sowie die aerodynamischen Beiwerte berechnet und, soweit möglich, mit Meßergebnissen verglichen. Für den Pfeilflügel mit

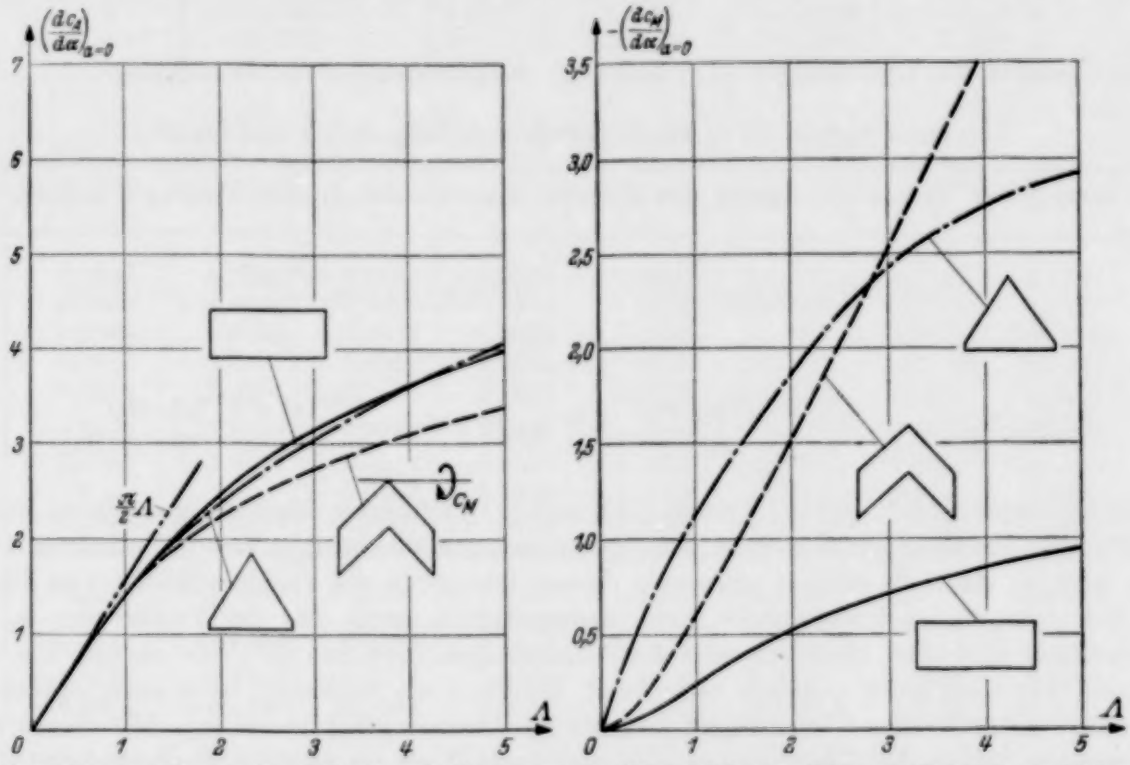



Abb. 7. Lineare Beiwerte für Auftrieb und Kippmoment in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis bei verschiedenen Flügelformen. — ——— Rechteckflügel; — — — — Pfeilflügel, $\varphi = 45°$; —·—·— Deltaflügel, $\lambda = 0{,}125$.

dem Seitenverhältnis $\Lambda = 1$, dem Zuspitzungsverhältnis $\lambda = 1$ und dem Pfeilwinkel $\varphi = 45°$ ist als Beispiel in Abschnitt 8 die Zahlenrechnung ausführlich wiedergegeben.

Für Rechteckflügel, für Pfeilflügel konstanter Tiefe mit dem Pfeilwinkel $\varphi = 45°$ und für Deltaflügel mit $\lambda = 0{,}125$ Zuspitzung wurden bei verschiedenen Seitenverhältnissen Rechnungen nach dem dargestellten Verfahren durchgeführt. Abb. 7 zeigt die linearen Anteile $(dc_A/d\alpha)_{\alpha=0}$ und $(dc_M/d\alpha)_{\alpha=0}$ in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis. Für kleineres Seitenverhältnis gehen alle $dc_A/d\alpha$-Kurven in den Verlauf der Theorie schlanker Körper $dc_A/d\alpha = (\pi/2)\,\Lambda$ über. Die linearen

Anteile wachsen mit zunehmendem Seitenverhältnis. Anders die nichtlinearen Anteile, die für dieselben Flügelserien in Abb. 8 als Funktion des Seitenverhältnisses dargestellt sind. Die beiden Koeffizienten der nichtlinearen Glieder $C_1$ und $C_2$ haben beide, absolut genommen, ein Maximum

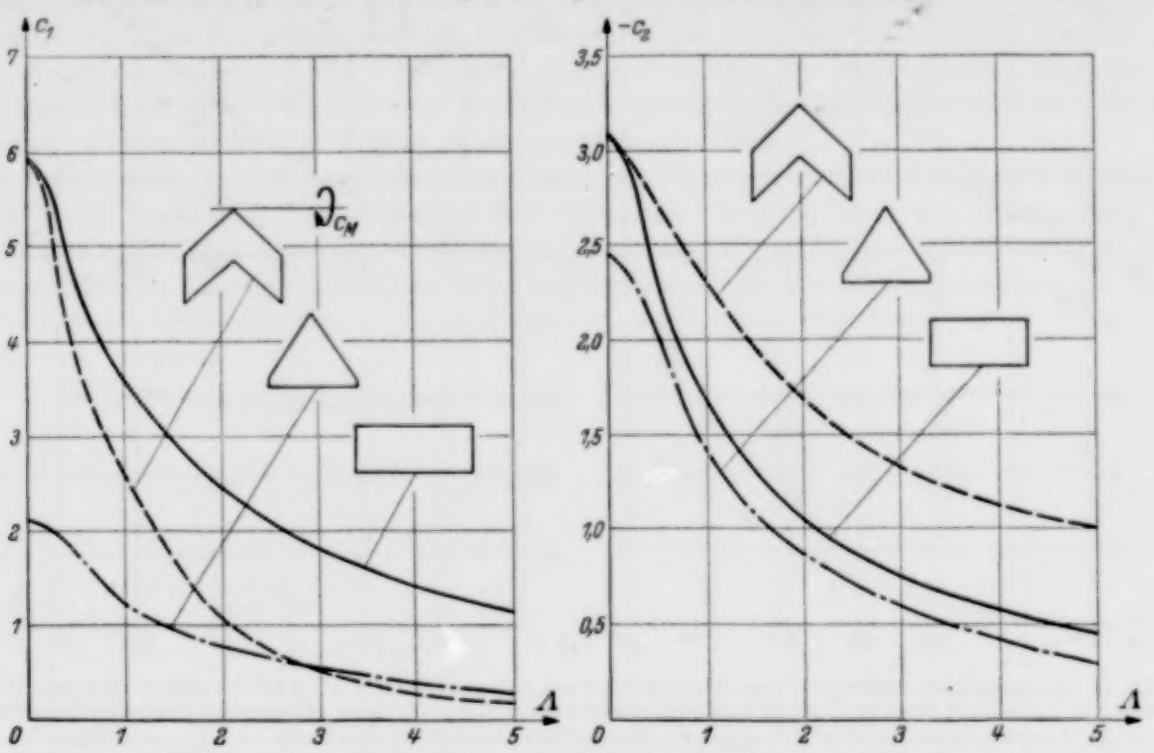



Abb. 8. Nichtlineare Beiwerte für Auftrieb und Kippmoment in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis bei verschiedenen Flügelformen nach Bild 7.

$$c_A = \left(\frac{dc_A}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + C_1 \frac{\alpha}{|\alpha|} \alpha^2, \qquad c_M = \left(\frac{dc_M}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + C_2 \frac{\alpha}{|\alpha|} \alpha^2.$$

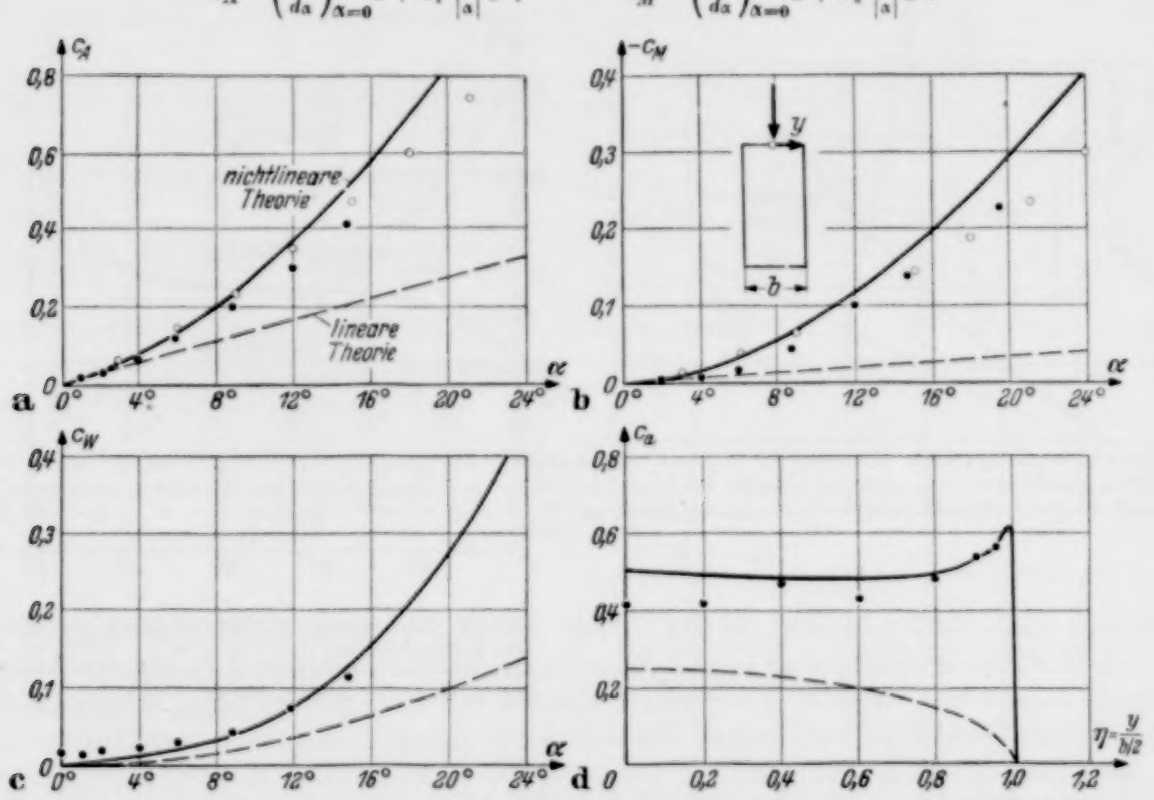



Abb. 9. Aerodynamische Beiwerte für einen Rechteckflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 0{,}5$ mit scharfer Vorderkante. Vergleich von Theorie und Messung. — a), b), c) Aerodynamische Beiwerte $c_A, c_M, c_W$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel $\alpha$; d) Auftriebsverteilung für $\alpha = 14{,}7°$. — — — — lineare Theorie nach *E. Truckenbrodt*; ——— nichtlineare Theorie; ● Messung von *N. Scholz*[1], Re = $10^6$; ○ Messung von *H. Winter* (s. Fußnote 3 von S. 432), Re = $6.10^6$.

[1] *N. Scholz*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 84 und Forschung Ing.-Wes. 16 (1949/50), S. 85.

bei $\Lambda = 0$ und nehmen dann mit wachsendem Seitenverhältnis sehr rasch nach Null hin ab. Damit liegt erstmalig eine Aussage darüber vor, in welcher Weise die Nichtlinearität mit wachsendem Seitenverhältnis abklingt. Alle bisherigen Untersuchungen hatten darüber keinen Aufschluß geben können.

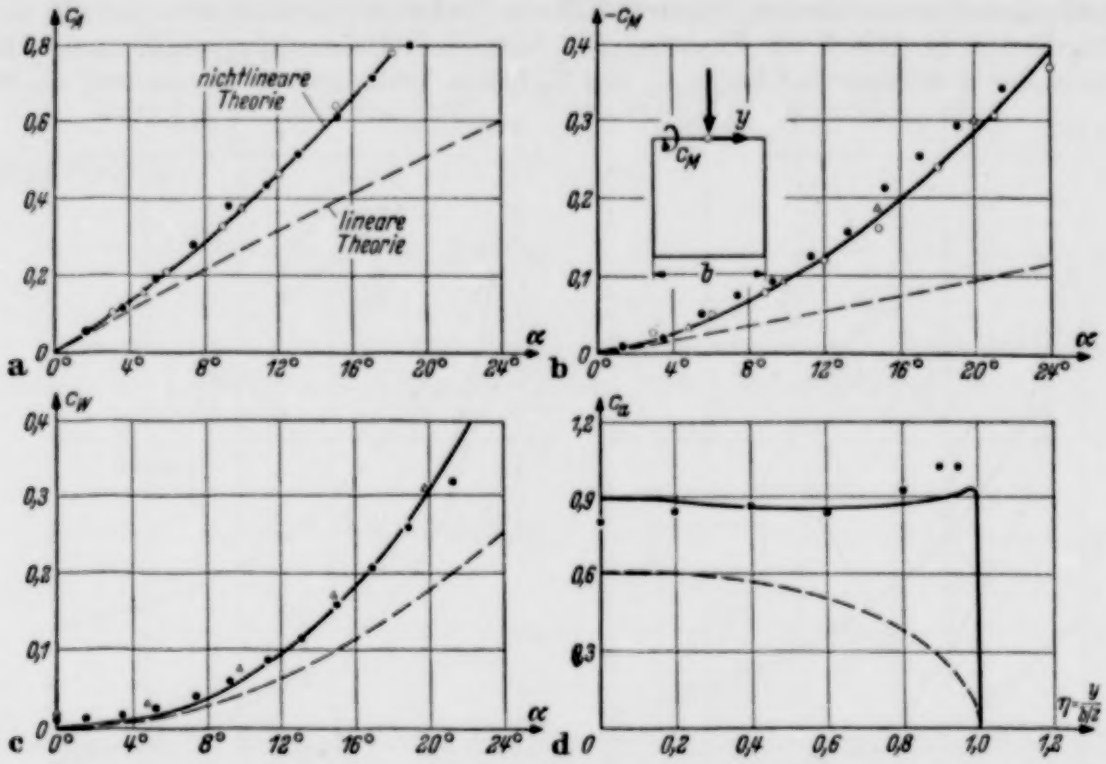
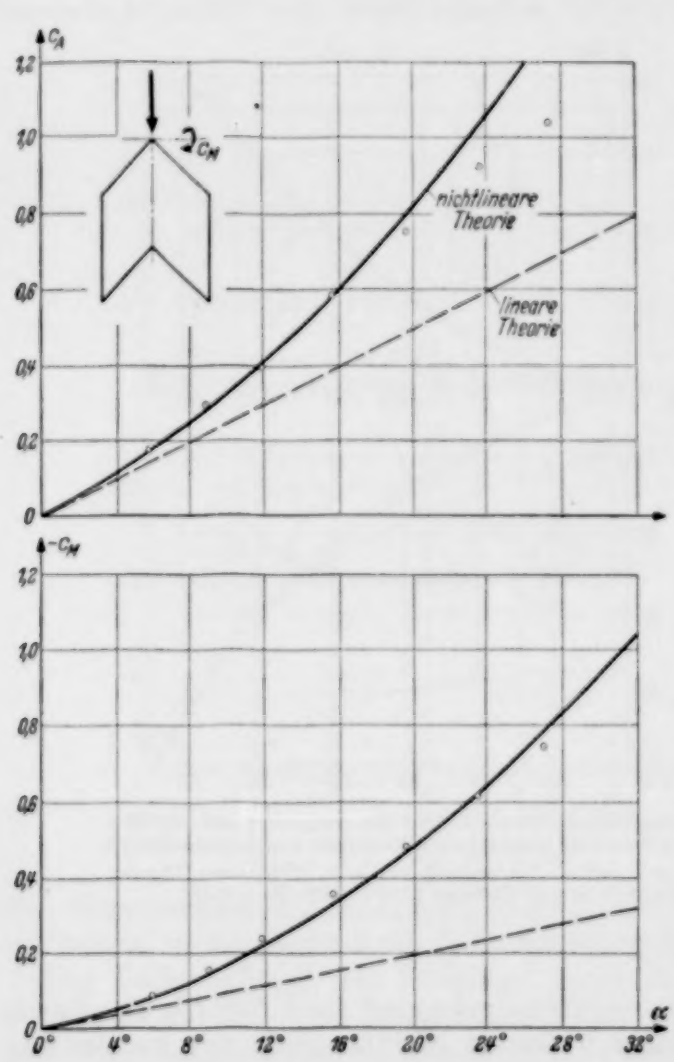



Abb. 10. Aerodynamische Beiwerte für einen Rechteckflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 1{,}0$ mit scharfer Vorderkante. Vergleich von Theorie und Messung. — a), b), c) Aerodynamische Beiwerte $c_A$, $c_M$, $c_W$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel $\alpha$; d) Auftriebsverteilung für $\alpha = 19{,}4°$. — — — — — lineare Theorie nach *E. Truckenbrodt*; ———— nichtlineare Theorie; ● Messung von *N. Scholz* (s. Fußnote 1 von S. 445), Re = $8 \cdot 10^5$; ○ Messung von *H. Winter* (s. Fußnote 3 von S. 432), Re = $4{,}2 \cdot 10^5$; △ Messung von *O. Flachsbart*[1], Re = $6 \cdot 10^5$.



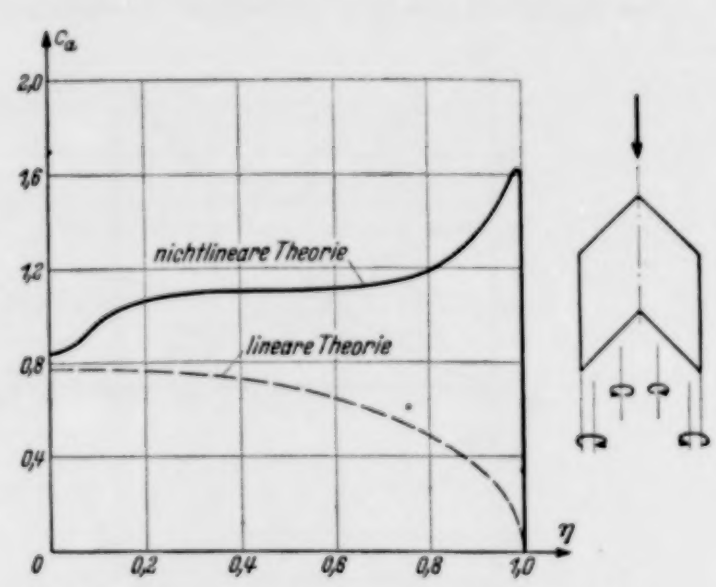




Abb. 12. Theoretische Auftriebsverteilung für einen Pfeilflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 1$ ($\varphi = 45°$, $\lambda = 1{,}0$) mit scharfer Vorderkante nach der linearen und nichtlinearen Tragflächentheorie ($\alpha = 25°$). — — — — — lineare Theorie nach *E. Truckenbrodt*; ———— nichtlineare Theorie.

Abb. 11. Beiwerte für Auftrieb $c_A$ und Kippmoment $c_M$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel $\alpha$ für einen Pfeilflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 1$ ($\varphi = 45°$, $\lambda = 1{,}0$) mit scharfer Vorderkante. Vergleich von Theorie und Messung. — — — — — lineare Theorie nach *E. Truckenbrodt*[2]; ———— nichtlineare Theorie; ○ eigene Messung, Re = $7 \cdot 10^5$

[1] *O. Flachsbart*, Messungen an ebenen und gewölbten Platten; Ergebn. der AVA Göttingen, IV. Liefg. (1932). S. 96.
[2] *E. Truckenbrodt*, Z. Flugwiss. 2 (1954), S. 184.

In den Abb. 9 und 10 sind für die Rechteckflügel mit den Seitenverhältnissen $\Lambda = 0{,}5$ und 1,0 Vergleiche mit Messungen an vorn zugeschärften symmetrischen Platten durchgeführt worden. Dargestellt sind jeweils Auftrieb, Kippmoment und induzierter Widerstand in Abhängigkeit vom Anstellwinkel $\alpha$. Zum Vergleich wurden jeweils auch die Kurven der linearen Theorie mit eingetragen. In allen Fällen ist die Übereinstimmung zwischen der vorliegenden Theorie und den Meßergebnissen sehr gut. Für alle drei Komponenten wird die Abhängigkeit vom Anstellwinkel bis zu hohen Werten desselben richtig wiedergegeben.

In den beiden Abb. 9 und 10 sind darüber hinaus für einen jeweils festen Anstellwinkel ($\alpha = 14{,}7°$ bzw. 19,4°) die Verteilung der örtlichen Auftriebsbeiwerte $c_a(\eta)$ über der Spannweite mit entsprechenden Ergebnissen aus Druckverteilungsmessungen verglichen. Auch hierbei zeigt die nichtlineare Theorie wesentlich bessere Übereinstimmung mit den Meßergebnissen als die lineare

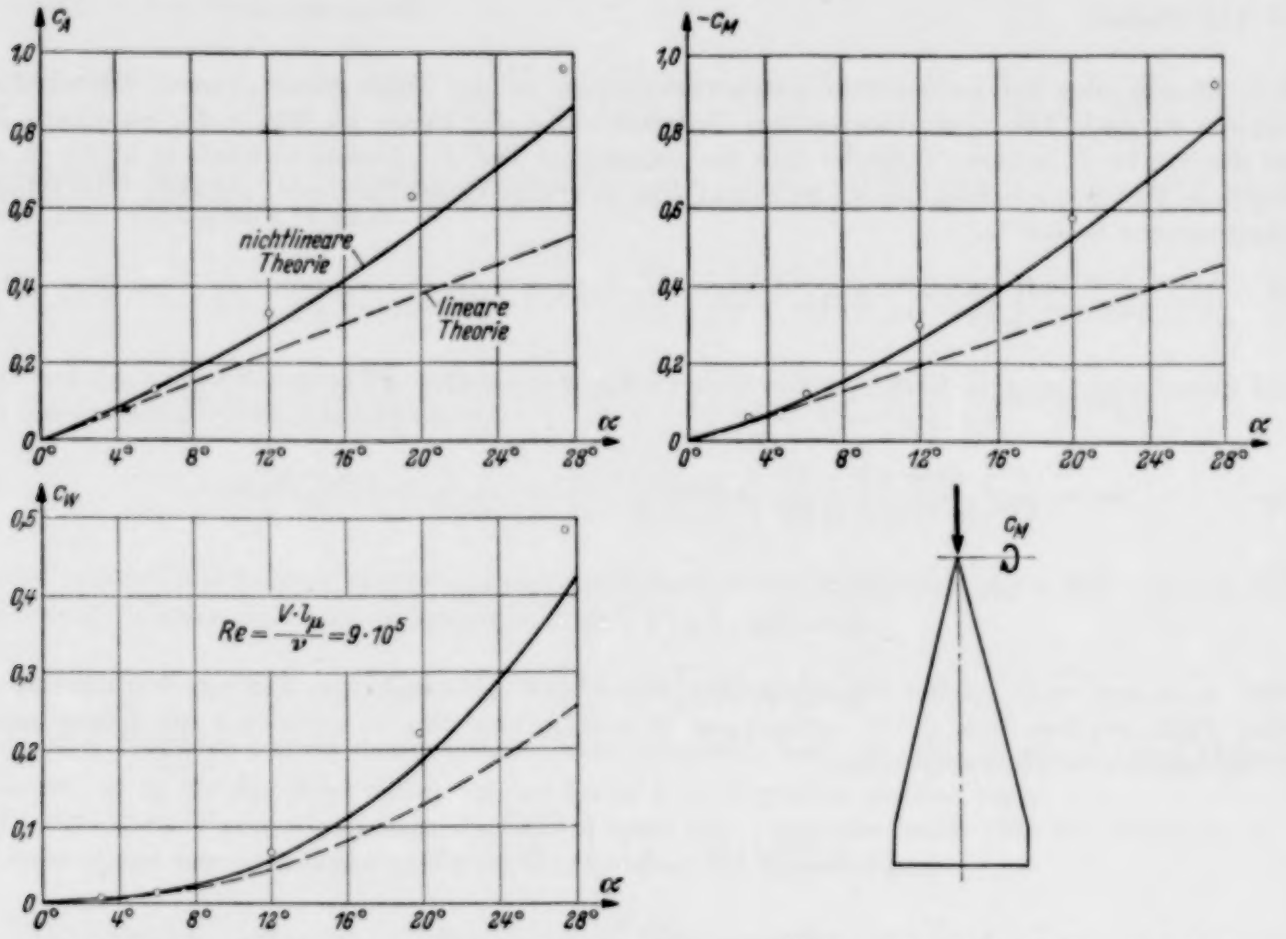



Abb. 13. Aerodynamische Beiwerte $c_A, c_M, c_W$ für Auftrieb, Kippmoment und Widerstand in Abhängigkeit vom Anstellwinkel $\alpha$ für einen Deltaflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 0{,}78$ ($\lambda = 0{,}125$) mit scharfer Vorderkante. — Vergleich von Theorie und Messung. — — — — — lineare Theorie nach *E. Truckenbrodt*; ———— nichtlineare Theorie; ○ eigene Messung, $Re = 9 \cdot 10^5$.

Theorie. Vor allem ist die theoretische Kurve ebenso wie die Messung über einen großen Teil der Spannweite praktisch konstant und fällt erst nahe am Flügelende plötzlich auf Null ab. Das aber bedeutet, daß über einen großen Teil des Flügels keine freien Wirbel vom Flügel abgehen. Das dem Rechenverfahren zugrunde liegende Wirbelmodell liefert also in Übereinstimmung mit der Beobachtung das Ergebnis, daß die freien Wirbel in der Hauptsache von den Seitenkanten abgehen, wo die Auftriebsverteilung sehr rasch auf Null absinkt und daher starke Änderungen aufweist.

Einen entsprechenden Vergleich der theoretischen Werte für Auftrieb und Kippmoment mit den Experimenten für einen Pfeilflügel ($\Lambda = 1$ und $\lambda = 1$) zeigt Abb. 11. Auch hier besteht sehr gute Übereinstimmung. Da hier keine konische Strömung vorliegt, waren solche Flügelformen nichtlinearen Theorien bisher überhaupt nicht zugänglich.

In Abb. 12 ist für denselben Flügel die Verteilung der örtlichen Auftriebsbeiwerte $c_a$ aufgetragen. Man erkennt einmal den sehr großen Beitrag des nichtlinearen Anteiles. Zum anderen ergibt die Hinzunahme der nichtlinearen Glieder wieder praktisch konstante Zirkulationsverteilung über dem größten Teil der Spannweite mit starken Änderungen in Randnähe. Interessant ist der kleine Einbruch der Zirkulationsverteilung in der Flügelmitte, der ein Paar abgehender freier

Wirbel zur Folge hat, deren Drehsinn, wie in Abb. 12 skizziert, dem der üblichen Randwirbel entgegengesetzt ist. Tatsächlich konnte experimentell dieses Wirbelpaar bei den beiden Flügeln mittels einer Wirbelsonde nachgewiesen werden. Auch der Vergleich der theoretischen Ergebnisse für einen Deltaflügel ($\Lambda = 0{,}78$, $\lambda = 0{,}125$) mit Messungen in Abb. 13 zeigt gute Übereinstimmung.

Eine grundsätzliche und wichtige Frage ist, inwieweit Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung an Tragflügeln den Einfluß der Hinterkante auf die Strömung berücksichtigen. Die nichtlinearen Verfahren z. B. von *Brown-Michael*[1] und *Mangler*[2], setzen bei der Behandlung von Deltaflügeln konische Strömung voraus, d. h. auf jedem Strahl durch die Flügelspitze sind z. B. die Druckwerte $\Delta p = (p_u - p_{ob})$ als konstant angenommen. Der Einfluß der Hinterkante, insbesondere das Absinken der Druckdifferenz $\Delta p$ auf Null, kann dabei naturgemäß nicht miterfaßt werden. Das hier beschriebene Berechnungsverfahren ist so angelegt, daß auf jeden Fall die Druckdifferenz an der Hinterkante in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund auf Null absinkt.

**7. Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten in der Nähe einer ebenen Wirbelschicht.** Gegeben sei nach Abb. 6 ein elementarer Hufeisenwirbel der Breite $dy$, der in der $x$-$y$-Ebene liegt und die Stärke $\Gamma$ besitzt. Befindet sich der gebundene Teil des Hufeisenwirbels in $x', y'$, so wird nach dem Biot-Savartschen Gesetz im Punkt $P(x, y, z)$ eine Geschwindigkeit induziert, die folgende Komponenten besitzt[3]:

$$du = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{z}{R^3}\,dy' , \tag{55}$$

$$pv = -\frac{\Gamma}{4\pi}\left\{\frac{2\,(y-y')\,z}{[(y-y')^2+z^2]^2}\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)+\frac{(y-y')^2\,z}{(y-y')^2+z^2}\,\frac{x-x'}{R^3}\right\}dy' , \tag{56}$$

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi}\left\{\frac{(y-y')^2-z^2}{[(y-y')^2+z^2]^2}\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)-\frac{z^2}{(y-y)^2+z^2}\,\frac{x-x'}{R^3}\right\}dy' \tag{57}$$

mit

$$R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} . \tag{58}$$

Reiht man nun viele solcher Elementar-Hufeisenwirbel aneinander, so daß ein Wirbelband entsteht, dann ergeben sich durch Integration in $y$-Richtung von $-s$ bis $+s$ die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit zu

$$u(x, y, z) = \frac{z}{4\pi}\int_{+s}^{-s}\frac{\Gamma(y')}{R^3}\,dy' , \tag{59}$$

$$v(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\Gamma(y')\left\{\frac{2\,(y-y')\,z}{[(y-y')^2+z^2]^2}\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)+\frac{(y-y')\,z}{(y-y')^2+z^2}\,\frac{x-x'}{R^3}\right\}dy' , \tag{60}$$

$$w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-s}^{+s}\Gamma(y')\left\{\frac{(y-y')^2-z^2}{[(y-y')^2+z^2]^2}\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)-\frac{z^2}{(y-y')^2+z^2}\,\frac{x-x'}{R^3}\right\}dy' . \tag{61}$$

Solange man die induzierte Geschwindigkeit in Punkten außerhalb der Wirbelschicht berechnen will, bereitet die Integration über die Flügelspannweite keine Schwierigkeiten. Für Punkte in der Wirbelschicht ($z = 0$) verschwindet die Geschwindigkeitskomponente $u$, bei den Komponenten $v$ und $w$ treten jedoch an der Stelle $y' = y$ Unendlichkeitsstellen im Integranden auf, die eine gesonderte Betrachtung erfordern. Zur Durchführung der Integration wird das Integrationsintervall in drei Teilintervalle zerlegt, so daß man für das Integral schreiben kann

$$\int_{-s}^{+s}\ldots dy' = \int_{-s}^{y-\varepsilon}\ldots dy' + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\ldots dy' + \int_{y+\varepsilon}^{s}\ldots dy' , \tag{62}$$

[1] Siehe Fußnote 4 von Seite 435.
[2] Siehe Fußnote 8 von Seite 435.
[3] *E. Truckenbrodt*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953), S. 165.

oder mit der Abkürzung

$$\int_{-s}^{+s} \dots dy' = \int_{-s}^{y-\varepsilon} \dots dy' + \int_{y+\varepsilon}^{+s} \dots dy' \tag{63}$$

auch

$$\int_{-s}^{+s} \dots dy' = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \dots dy' + \int_{-s}^{+s} \dots dy' . \tag{64}$$

Dabei ist $\varepsilon$ zunächst eine kleine, aber endliche positive Größe.

Bei der Bestimmung der Geschwindigkeitskomponente $v(x, y, z)$ in der Wirbelschicht kann jetzt für den zweiten Anteil in (64) des Integrales der Grenzwert $z \to 0$ sofort ausgeführt werden, da hierbei keine Unendlichkeitsstelle auftritt. Da $z$ im Zähler des Integranden steht, verschwindet der zweite Anteil, und man erhält

$$v(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{z \to 0} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \Gamma(y') \left\{ \frac{2(y-y')z}{[(y-y')^2 + z^2]^2} \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right) + \frac{(y-y')z}{(y-y')^2 + z^2} \frac{x-x'}{R^3} \right\} dy' . \tag{65}$$

Sowohl $z^2$ als auch $(y-y')^2$ sind klein gegenüber $(x-x')^2$, so daß $R$ durch $|x-x'|$ ersetzt werden kann. Aus (65) ergibt sich dann

$$v(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{z \to 0} \left\{ \left(1 + \frac{x-x'}{|x-x'|}\right) \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \Gamma(y) \frac{2(y-y')z\,dy'}{[(y-y')^2 + z^2]^2} + \frac{x-x'}{|x-x'|^3} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \frac{(y-y')z\,dy'}{(y-y')^2 + z^2} \right\} . \tag{66}$$

Während das zweite Integral für beliebiges $z$ und $\varepsilon$ verschwindet, erhält man aus dem ersten Integral durch partielle Integration

$$v(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{x-x'}{|x-x'|}\right) \lim_{z \to 0} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{z\,dy'}{(y-y')^2 + z^2} . \tag{67}$$

Ersetzt man $d\Gamma/dy'$ in dem Integrationsintervall durch einen Mittelwert, dann läßt sich das Integral sofort auflösen, und man erhält im Grenzfall $z \to 0$

$$v(x, y, 0) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x-x'}{|x-x'|}\right) \frac{z}{|z|} \overline{\frac{d\Gamma}{dy}} . \tag{68}$$

Da in dem Ergebnis $\varepsilon$ nicht mehr auftritt, kann $\varepsilon$ beliebig klein gewählt werden, so daß statt des Mittelwertes $\overline{d\Gamma/dy}$ der Wert $d\Gamma/dy$ an der Stelle $y' = y$ gesetzt werden kann.

In derselben Weise erhält man durch Aufteilen des Integrales nach (64) die Komponente $w$ der induzierten Geschwindigkeit. Berücksichtigt man die Beziehungen

$$\lim_{z \to 0} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \frac{z^2\,dy'}{[(y-y')^2 + z^2]^2} = 0 , \tag{69}$$

$$\lim_{z \to 0} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \frac{z^2\,dy'}{(y-y')^2 + z^2} = 0 , \tag{70}$$

so erhält man aus (61)

$$w(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \lim_{z \to 0} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right) dy' + \frac{1}{4\pi} \lim_{z \to 0} \int \frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2 + z^2} \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right) dy' . \tag{71}$$

Wählt man im ersten Integral für $\Gamma(y')\left(1 + \frac{x-x'}{R}\right)$ wieder einen Mittelwert über dem Intervall $y - \varepsilon \leqq y' \leqq y + \varepsilon$, so läßt sich das Integral sofort lösen, und man erhält im Grenzfall $z \to 0$

$$w(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2}{\varepsilon} \overline{\Gamma(y') \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right)} - \int_{-s}^{+s} \frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2} \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right) dy' \right] . \tag{72}$$

Dabei ist jetzt

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} . \tag{73}$$

Der Querstrich über dem ersten Term bedeutet die Mittelung im Intervall $y - \varepsilon \leqq y' \leqq y + \varepsilon$.

Tabelle 5. *Koeffizienten-Matrix für die beiden Gleichungssysteme zur Berechnung der Zirkulations- bzw. Momentenverteilung beim Pfeilflügel mit dem Seitenverhältnis* $A = 1$.

| $\varkappa$ | $G_{1\varkappa}$ | $G_{2\varkappa}$ | $G_{3\varkappa}$ | $G_{4\varkappa}$ | $G_{5\varkappa}$ | $G_{6\varkappa}$ | $G_{7\varkappa}$ | $G_{8\varkappa}$ | $M_{1\varkappa}$ | $M_{2\varkappa}$ | $M_{3\varkappa}$ | $M_{4\varkappa}$ | $M_{5\varkappa}$ | $M_{6\varkappa}$ | $M_{7\varkappa}$ | $M_{8\varkappa}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 41,017 | −14,776 | 0 | − 1,196 | 0 | −0,372 | 0 | −0,126 | − 0,404 | − 0,159 | 0 | − 0,061 | 0 | − 0,035 | 0 | − 0,016 |
| 2 | − 7,497 | 20,919 | − 8,108 | 0 | −0,798 | 0 | −0,315 | 0 | − 0,190 | − 0,246 | − 0,129 | 0 | − 0,049 | 0 | − 0,030 | 0 |
| 3 | 0 | − 5,558 | 14,429 | − 5,718 | 0 | −0,633 | 0 | −0,175 | 0 | − 0,425 | − 0,368 | − 0,154 | 0 | − 0,049 | 0 | − 0,014 |
| 4 | − 0,320 | 0 | − 4,447 | 11,340 | −4,561 | 0 | −0,600 | 0 | − 0,101 | 0 | − 0,459 | − 0,339 | − 0,131 | 0 | − 0,051 | 0 |
| 5 | 0 | − 0,346 | 0 | − 3,819 | 9,653 | −3,964 | 0 | −0,397 | 0 | − 0,165 | 0 | − 0,597 | − 0,396 | − 0,126 | 0 | − 0,028 |
| 6 | − 0,068 | 0 | − 0,349 | 0 | −3,511 | 8,690 | −3,817 | 0 | − 0,050 | 0 | − 0,198 | 0 | − 0,616 | − 0,388 | − 0,138 | 0 |
| 7 | 0 | − 0,101 | 0 | − 0,386 | 0 | −3,519 | 8,192 | −3,267 | 0 | − 0,090 | 0 | − 0,255 | 0 | − 0,769 | − 0,421 | − 0,099 |
| 8 | − 0,036 | 0 | − 0,153 | 0 | −0,586 | 0 | −6,281 | 8,034 | − 0,038 | 0 | − 0,151 | 0 | − 0,404 | 0 | − 1,288 | − 0,404 |
| 9 | 24,987 | − 9,309 | 0 | − 0,845 | 0 | −0,292 | 0 | −0,106 | 67,804 | −24,001 | 0 | − 1,617 | 0 | − 0,332 | 0 | − 0,072 |
| 10 | − 4,333 | 12,739 | − 5,296 | 0 | −0,593 | 0 | −0,255 | 0 | −12,201 | 34,558 | −12,979 | 0 | − 0,949 | 0 | − 0,234 | 0 |
| 11 | 0 | − 3,088 | 8,793 | − 3,821 | 0 | −0,480 | 0 | −0,145 | 0 | − 8,830 | 23,908 | − 8,966 | 0 | − 0,683 | 0 | − 0,120 |
| 12 | − 0,134 | 0 | − 2,371 | 6,912 | −3,092 | 0 | −0,462 | 0 | − 0,387 | 0 | − 6,863 | 18,804 | − 6,947 | 0 | − 0,587 | 0 |
| 13 | 0 | − 0,120 | 0 | − 1,931 | 5,887 | −2,684 | 0 | −0,310 | 0 | − 0,312 | 0 | − 5,617 | 16,045 | − 5,945 | 0 | − 0,385 |
| 14 | − 0,020 | 0 | − 0,112 | 0 | −1,722 | 5,304 | −2,597 | 0 | − 0,043 | 0 | − 0,276 | 0 | − 5,010 | 14,479 | − 5,540 | 0 |
| 15 | 0 | − 0,028 | 0 | − 0,117 | 0 | −1,693 | 4,999 | −2,249 | 0 | − 0,054 | 0 | − 0,271 | 0 | − 4,820 | 13,653 | − 4,811 |
| 16 | − 0,009 | 0 | − 0,037 | 0 | −0,155 | 0 | −2,899 | 4,904 | − 0,016 | 0 | − 0,074 | 0 | − 0,381 | 0 | − 8,857 | 13,395 |

Führt man eine partielle Integration aus und berücksichtigt, daß die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y')$ an den Flügelenden verschwindet, d. h. $\Gamma(\pm s) = 0$, so ergibt sich

$$w(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{2}{\varepsilon}\overline{\Gamma(y')\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)}\right.$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\left[\Gamma(y')\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)\right]_{y-\varepsilon}^{y}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\left[\Gamma(y')\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)\right]_{y}^{y+\varepsilon}$$
$$\left.+\int_{-s}^{+s}\frac{\frac{d}{dy'}\left[\Gamma(y')\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)\right]}{y-y'}\,dy'\right\}. \tag{74}$$

Bildet man den Grenzwert $\varepsilon \to 0$, so heben sich die drei ersten Glieder gegenseitig auf und man erhält

$$w(x, y, 0) =$$
$$-\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-s}^{+s}\frac{\frac{d}{dy'}\left[\Gamma(y')\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)\right]}{y-y'}\,dy'. \tag{75}$$

Diesen Grenzwert des uneigentlichen Integrales bezeichnet man als Cauchyschen Hauptwert und schreibt dafür einfacher[1]

$$w(x, y, 0) =$$
$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{-s}^{+s}\frac{\frac{d}{dy'}\left[\Gamma(y')\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)\right]}{y-y'}\,dy'. \tag{76}$$

Zur Bestimmung der $z$-Komponente $w$ außerhalb der Wirbelschicht, jedoch in der Nähe derselben, geht man von einer *Taylor*-Reihenentwicklung aus:

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0) + \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, 0)\, z \ldots . \tag{77}$$

Da die Strömung quellenfrei ist, gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{78}$$

Daraus folgt wegen $u(x, y, 0) \equiv 0$ und (68)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{x-x'}{|x-x'|}\right)\frac{z}{|z|}\frac{d^2\Gamma}{dy^2}. \tag{79}$$

[1] Unter dem Cauchyschen Hauptwert eines uneigentlichen Integrales wird folgendes verstanden:

$$\oint_{-s}^{+s}\ldots dy' = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-s}^{+s}\ldots dy'$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-s}^{y-\varepsilon}\ldots dy' + \int_{y+\varepsilon}^{+s}\ldots dy'.\right\}.$$

Man erhält daher für die vertikal induzierte Geschwindigkeit in Wirbelschichtnähe

$$w(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-s}^{+s} \frac{\frac{d}{dy'}\left[\Gamma(y')\left(1+\frac{x-x'}{R}\right)\right]}{y-y'}\,dy' - \frac{1}{4}\left(1+\frac{x-x'}{|x-x'|}\right)\frac{d^2\Gamma}{dy^2}\frac{z}{|z|}\,z\,. \tag{80}$$

Besonders bemerkenswert ist, daß das Zusatzglied unabhängig von der Koordinate $x$ ist.

**8. Zahlenrechnung für einen Pfeilflügel.** Für den in Abb. 11 dargestellten Pfeilflügel mit dem Seitenverhältnis $\Lambda = 1$ soll die Berechnung der Auftriebsverteilung und der aerodynamischen Beiwerte im einzelnen durchgeführt werden. Der Flügel ist durch folgende geometrische Daten gekennzeichnet:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda = 1, \qquad \varphi = 45°, \qquad \lambda = 1, \qquad \frac{s}{l} = 0{,}5\,,\\ &x_v = (\operatorname{sign} y)\,y\,, \qquad \frac{dl}{dy} = 0\,, \qquad \frac{dx_v}{dy} = \operatorname{sign} y\,,\\ &\alpha^*(\eta) = \alpha^{**} = \alpha = \text{konst.} \qquad \text{(unverwundener Flügel)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Ermittelt man die Einflußfunktionen $i_{\nu n}$ und $j_{\nu n}$ an den Stellen $\eta_n = y_n/s = \cos[n\pi/(m+1)]$ $(m = 15)$ auf der Hinterkante und der $l/4$-Linie und benutzt man die von *Truckenbrodt* tabulierten Koeffizienten $b_\nu$, $c_\nu$, $a_{\nu\nu}$ und $a_{\nu n}$ für $m = 15$, so ergibt sich das erste Gleichungssystem (50) für die Werte $g_{1n}$ und $m_{1n}$ der Funktionen $g_1$ und $m_1$ an den Stellen $\eta_n = y_n/s$ in der folgenden Form:

$$\sum_{n=1}^{n=8} G_{n\varkappa}\, g_{1n} + \sum_{n=1}^{n=8} M_{n\varkappa}\, m_{1n} = 1 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, 16)\,. \tag{82}$$

Dabei bilden die Koeffizienten $G_{n\varkappa}$ und $M_{n\varkappa}$ eine 16-reihige quadratische Matrix, die in Tabelle 5 wiedergegeben ist.

Dieses Gleichungssystem wird am einfachsten nach dem von *E. Truckenbrodt* angegebenen Iterationsverfahren gelöst. Die Tabelle 6 enthält neben den Lösungswerten selbst auch die ersten und zweiten Ableitungen, die nach den Summenformeln (45) und (46) ermittelt worden

Tabelle 6. *Funktionswerte der Zirkulations- bzw. Momentenverteilung und deren Ableitungen für den Pfeilflügel mit dem Seitenverhältnis $\Lambda = 1$.*

| $n$ | $\eta$ | $g_{1n}$ | $m_{1n}$ | $\frac{dg_{1n}}{d\eta}$ | $\frac{d^2g_{1n}}{d\eta^2}$ | $\frac{dm_{1n}}{d\eta}$ | $\frac{d^2m_{1n}}{d\eta^2}$ | $g_{2n}$ | $m_{2n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,981 | 0,185 | 0,033 | —4,726 | —128,28 | —0,684 | —21,05 | 3,826 | —1,056 |
| 2 | 0,924 | 0,361 | 0,061 | —2,262 | — 16,90 | —0,382 | — 4,50 | 2,897 | —0,827 |
| 3 | 0,832 | 0,522 | 0,077 | —1,383 | — 5,55 | —0,022 | — 1,43 | 2,012 | —0,583 |
| 4 | 0,707 | 0,661 | 0,078 | —0,903 | — 2,92 | 0 | — 0,77 | 1,525 | —0,448 |
| 5 | 0,556 | 0,769 | 0,063 | —0,553 | — 1,40 | +0,183 | — 0,25 | 1,137 | —0,334 |
| 6 | 0,383 | 0,843 | 0,041 | —0,315 | — 1,29 | +0,060 | + 0,11 | 0,985 | —0,301 |
| 7 | 0,195 | 0,879 | 0,010 | —0,077 | — 1,00 | +0,323 | — 1,26 | 0,774 | —0,232 |
| 8 | 0 | 0,883 | —0,039 | 0 | 0 | 0 | + 3,71 | 0,193 | —0,163 |

sind. Mit diesen Werten lassen sich dann die Einflußfunktionen $f_\nu^*$ und $f_\nu^{**}$ nach (43) und (44) bestimmen und daraus die rechten Seiten des zweiten Gleichungssystems (51), welches lautet

$$\sum_{n=1}^{n=8} G_{n\varkappa}\, g_{2n} + \sum_{n=1}^{n=8} M_{n\varkappa}\, m_{2n} = R_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots 16)\,. \tag{83}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt dasselbe Koeffizientenschema wie das erste System (Tabelle 5). Die rechten Seiten ergeben sich folgendermaßen: Für $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = 8$ gilt $R_\varkappa = R_n^*$ mit $\varkappa = n$ und

$$R_n^* = -0{,}75\,\frac{d^2g_{1n}}{d\eta^2} + \frac{dg_{1n}}{d\eta} - \frac{d^2m_{1n}}{d\eta^2} \qquad (n = 1, 2 \ldots 8)\,. \tag{84}$$

Für $\varkappa = 9$ bis $\varkappa = 16$ gilt $R_\varkappa = R_n^{**}$ mit $\varkappa = n + 8$ und

$$R_n^{**} = -0{,}103\,\frac{d^2g_{1n}}{d\eta^2} + 0{,}609\,\frac{dg_{1n}}{d\eta} - 0{,}276\,g_{1n} - 0{,}333\,\frac{d^2m_{1n}}{d\eta^2} + 1{,}655\,\frac{dm_{1n}}{d\eta} \qquad (n = 1, 2, \ldots, 8)\,. \tag{85}$$

Die numerische Rechnung liefert dann:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_n^*$ | 112,53 | 14,92 | 4,20 | 1,99 | 0,79 | 0,88 | 1,02 | —2,60 |
| $R_n^{**}$ | 16,16 | 1,13 | 0,02 | —0,19 | 0 | +0,24 | 0,40 | —1,11 |

Die Lösungen des zweiten Gleichungssystems sind in Tabelle 6 zusammen mit den Lösungen des ersten Gleichungssystems tabuliert. Für den Anstellwinkel $\alpha = 25°$ sind daraus die Auftriebsverteilungen nach der linearen und der nichtlinearen Theorie in Abb. 12 aufgetragen. Die aerodynamischen Beiwerte ergeben sich durch Integration nach (53). Berechnet man die Integrale mit Hilfe der Quadraturformel (34), so erhält man

$$\left(\frac{dc_A}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1{,}44, \qquad \left(\frac{dc_M}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = -0{,}58,$$

$$C_1 = 2{,}66, \qquad C_2 = -2{,}34.$$

**9. Zusammenfassung.** Es wird ein Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung an Tragflügeln in inkompressibler Strömung entwickelt, das über den Rahmen einer linearen Theorie hinaus auch eine nichtlineare Abhängigkeit des Auftriebes, des induzierten Widerstandes und des Kippmomentes vom Anstellwinkel liefert.

Durch eine einfache Erweiterung des üblichen Wirbelmodelles der linearen Tragflügeltheorie läßt sich die nichtlineare Abhängigkeit der aerodynamischen Beiwerte vom Anstellwinkel erfassen. Für die nichtlinearen Anteile, welche besonders bei Tragflügeln mit kleinem Seitenverhältnis gegenüber den linearen Anteilen nicht mehr vernachlässigbar sind, liefert die Theorie die Abhängigkeit vom Seitenverhältnis. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe eines Gleichungssystems, welches aus dem entsprechenden System der linearen Theorie durch eine geringfügige Abänderung hervorgeht. Die Theorie ist auf Flügel mit beliebiger Grundrißform anwendbar und liefert nicht nur die Kraftbeiwerte, sondern auch die Auftriebsverteilung über der Flügelfläche. Für kleine Anstellwinkel geht sie in die lineare Theorie über. — Vergleiche der theoretischen Ergebnisse mit Messungen zeigen sehr gute Übereinstimmung.

(Eingegangen am 2. November 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr.-Ing. *K. Gersten*, Braunschweig, Bienroder Weg 3.